

The 1986 recommended values of the fundamental physical constants

Quantity	Symbol	Value	Units	Relative uncertainty ppm
Molar mass	$M(n)$	1.008 664 904(14)	10^{-3} kg mol ⁻¹	0.014
Compton wavelength, $h/m_e c$	$\lambda_{C,n}$	1.319 591 10(12)	10^{-15} m	0.089
$\lambda_{C,n}/2\pi$	$\tilde{\lambda}_{C,n}$	2.100 194 45(19)	10^{-16} m	0.089
Magnetic moment ^a	μ_n	0.966 237 07(40)	10^{-26} J T ⁻¹	0.41
in Bohr magnetons	μ_n/μ_B	1.041 875 63(25)	10^{-3}	0.24
in nuclear magnetons	μ_n/μ_N	1.913 042 75(45)		0.24
Neutron-electron magnetic moment ratio	μ_n/μ_e	1.040 668 82(25)	10^{-3}	0.24
Neutron-proton magnetic moment ratio	μ_n/μ_p	0.684 979 34(16)		0.24
Deuteron				
Mass	m_d	3.343 586 0(20)	10^{-27} kg	0.59
in electron volts, $m_d c^2/\{e\}$		2.013 553 214(24)	u	0.012
		1875.613 39(57)	MeV	0.30
Deuteron-electron mass ratio	m_d/m_e	3670.483 014(75)		0.020
Deuteron-proton mass ratio	m_d/m_p	1.999 007 496(6)		0.003
Molar mass	$M(d)$	2.013 553 214(24)	10^{-3} kg mol ⁻¹	0.012
Magnetic moment ^a	μ_d	0.433 073 75(15)	10^{-26} J T ⁻¹	0.34
in Bohr magnetons	μ_d/μ_B	0.466 975 447 9(91)	10^{-3}	0.019
in nuclear magnetons	μ_d/μ_N	0.857 438 230(24)		0.028
Deuteron-electron magnetic moment ratio	μ_d/μ_e	0.466 434 546 0(91)	10^{-3}	0.019
Deuteron-proton magnetic moment ratio	μ_d/μ_p	0.307 012 203 5(51)		0.017
Physicochemical constants				
Avogadro constant	N_A, L	6.022 136 7(36)	10^{23} mol ⁻¹	0.59
Atomic mass constant, $m(^{12}C)/12$	m_u	1.660 540 2(10)	10^{-27} kg	0.59
in electron volts, $m_u c^2/\{e\}$		931.494 32(28)	MeV	0.30
Faraday constant	F	96 485.309(29)	C mol ⁻¹	0.30
Molar Planck constant	$N_A h$	3.990 313 23(36)	10^{-10} J s mol ⁻¹	0.089
	$N_A h c$	0.119 626 58(11)	J m mol ⁻¹	0.089
Molar gas constant	R	8.314 510(70)	J mol ⁻¹ K ⁻¹	8.4
Boltzmann constant, R/N_A	k	1.380 658(12)	10^{-23} J K ⁻¹	8.5
in electron volts, $k/\{e\}$		8.617 385(73)	10^{-5} eV K ⁻¹	8.4
in hertz, k/h		2.083 674(18)	10^{10} Hz K ⁻¹	8.4
in wavenumbers, k/hc		69.503 87(59)	m ⁻¹ K ⁻¹	8.4
Molar volume (ideal gas), RT/p (at 273.15 K, 101 325 Pa)	V_m	22 414.10(19)	cm ³ mol ⁻¹	8.4
Loschmidt constant, N_A/V_m	n_0	2.686 763(23)	10^{25} m ⁻³	8.5
Stefan-Boltzmann constant, $(\pi^2/60)k^4/h^3 c^2$	σ	5.670 51(19)	10^{-8} W m ⁻² K ⁻⁴	34
First radiation constant, $2\pi hc^2$	c_1	3.741 774 9(22)	10^{-16} W m ²	0.60
Second radiation constant, hc/k	c_2	0.014 387 69(12)	m K	8.4
Wien displacement law constant, $\lambda_{max} T = c_2/4.965 114 23 \dots$	b	2.897 756(24)	10^{-3} m K	8.4
Conversion factors and units				
Electron volt, $(e/C)J = \{e\} J$	eV	1.602 177 33(49)	10^{-19} J	0.30
Atomic mass unit (unified), $m_u = m(^{12}C)/12$	u	1.660 540 2(10)	10^{-27} kg	0.59
Standard atmosphere	atm	101 325	Pa	exact
Standard acceleration of gravity	g_n	9.806 65	m s ⁻²	exact
'As-maintained' electrical units				
BIPM-maintained ohm, Ω_{69-BI} as of 1 Jan 1985	Ω_{BI85}	$1 - 1.563(50) \times 10^{-6}$	Ω	
		$= 0.999 998 437(50)$	Ω	0.050
Drift rate of Ω_{69-BI}	$d\Omega_{69-BI}/dt$	-0.0566(15)	$\mu\Omega/\text{yr}$	-
BIPM-maintained volt, 483 594 GHz($h/2e$)	V_{76-BI}	$1 - 7.59(30) \times 10^{-6}$	V	
		$= 0.999 992 41(30)$	V	0.30
BIPM-maintained ampere, $A_{BIPM} = V_{76-BI}/\Omega_{69-BI}$	A_{BI85}	$1 - 6.03(30) \times 10^{-6}$	A	
		$= 0.999 993 97(30)$	A	0.30
X-ray standards				
Cu x-unit: $\lambda(\text{CuK}\alpha_1) \equiv 1537.400$ xu	xu(CuK α_1)	1.002 077 89(70)	10^{-13} m	0.70
Mo x-unit: $\lambda(\text{MoK}\alpha_1) \equiv 707.831$ xu	xu(MoK α_1)	1.002 099 38(45)	10^{-13} m	0.45
\AA^* : $= \lambda(\text{WK}\alpha_1) \equiv 0.209 010 0 \text{\AA}^*$	\AA^*	1.000 014 81(92)	10^{-10} m	0.92
Lattice spacing of Si (in vacuum, 22.5 °C) ^b	a	0.543 101 96(11)	nm	0.21
$d_{220} = a/\sqrt{8}$	d_{220}	0.192 015 540(40)	nm	0.21
Molar volume of Si, $M(\text{Si})/\rho(\text{Si}) = N_A a^3/8$	$V_m(\text{Si})$	12.058 817 9(89)	cm ³ mol ⁻¹	0.74

Digits in parentheses indicate the standard deviation uncertainty in the last digits of the given value.

Quantities in braces, such as {e}, refer to the numerical value only.

^a The scalar magnitude of the neutron moment is listed here. The neutron magnetic dipole is directed oppositely to that of the proton and corresponds to the dipole associated with a spinning negative charge distribution. The vector sum $\mu_d = \mu_p + \mu_n$ is approximately satisfied.

^b The lattice spacing of single-crystal Si can vary by parts in 10^7 depending on the preparation process. Measurements at the Physikalische-Technische Bundesanstalt in the Federal Republic of Germany indicate also the possibility of distortions from exact cubic symmetry of the order of 0.2 ppm.

6. Abschließender Kommentar

Die Grundlagen der modernen Elementarteilchenphysik sind Symmetrien, die als ordnendes Prinzip der Teilchen und der Gesetze ihrer Wechselwirkung gelten können. Danach kann man z.B. Kräfte immer dann identifizieren, wenn die entsprechende physikalische Theorie eine lokale Symmetrie (d.h. Eichsymmetrie) besitzt. Nach heutiger Auffassung können alle bekannten fundamentalen Wechselwirkungen als Eichtheorien formuliert werden. So konnte R. Utiyama sogar die Gravitation erklären, indem er die (globalen) Koordinatentransformationen der speziellen Relativitätstheorie zu lokalen Transformationen erweiterte. Wie im Fall des elektromagnetischen Feldes ist auch hier die einschränkende Forderung nach lokaler Invarianz mit der Vorstellung eines neuen Feldes, des Gravitationsfeldes, und eines die spezifische Wechselwirkung mit anderen Feldern charakterisierenden Eichteilchens verbunden. Dessen Ruhemasse spielt dabei eine entscheidende Rolle. So fordert die Eichtheorie zunächst, daß die den Eichfeldern entsprechenden Teilchen (Vektorbosonen) keine Masse besitzen dürfen, denn ein endlicher in die für die Quantenchromodynamik fundamentale Lagrangedichte eingeführter Massenwert würde die Eichinvarianz zerstören. Dementsprechend haben die virtuellen Photonen die Ruhemasse Null. Bei der schwachen Wechselwirkung widerspricht eine solche Erwartung jedoch teilweise der Erfahrung. Für diesen Fall konnte Einklang zwischen Theorie und Experiment erst durch ein neues Konzept für das physikalische Vakuum mittels des Prinzips 'spontaner Symmetriebrechung' hergestellt werden. Für die zwischen den Quarks ausgetauschten Teilchen, den Gluonen, wird eine spontane Symmetriebrechung jedoch nicht angenommen.

Generell gilt, daß die 'nackte' Masse m_0 eines Teilchens ein in der Theorie auftretender fiktiver Parameter ist, der sich vom 'Meßwert' m darin unterscheidet, daß in m 'Störungen' wie z.B. das Strahlungsfeld bei elektromagnetischen Prozessen enthalten sind. Bei kleinen Energien lassen sich z.B. in der Quantenelektrodynamik (QED) Störungsrechnungen mit der Feinstrukturkonstanten α als Entwicklungsparameter durchführen. Sie erlauben, die Differenz $m - m_0$ selbst für das als punktförmig angenommene Elektron mittels der sogenannten Renormierung genau zu berechnen. Die erreichbare Genauigkeit wird nur noch bei der Bestimmung des Landé-Faktors g_s übertroffen, der für die Verknüpfung des Spins eines Elektrons mit seinem magnetischen Moment relevant ist.

Diese hohe Übereinstimmung zwischen berechneten und gemessenem Wert trifft für die experimentelle Prüfung der QCD nicht mehr zu, da bei der durch sie beschriebenen starken Wechselwirkung zwischen den Quarks und Gluonen nur die farblosen Hadronen direkt beobachtbar sind. Außerdem läßt sich die Störungstheorie ganz im Gegensatz zur QED nur für hohe Energien verwenden, bei denen die Kopplung genügend schwach ist.

Wenig befriedigend ist auch das theoretische Verständnis der schwachen Wechselwirkung, vor allem wenn man es unter dem Blickwinkel der ungenügenden Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten Ruhemassen der betreffenden Eichteilchen - den Vektorbosonen W^\pm und Z^0 - und ihrer Feldeigenschaften bewertet. Man darf nicht übersehen, daß die in Analogie

zu dem in der QED benutzten Entwicklungsparameter α ein Kopplungsparameter g benötigt wird, zu dessen Bestimmung aus der Fermikonstanten eben nur die Masse der Vektorbosonen verfügbar ist. Deren Genauigkeit bestimmt die Genauigkeit von g .

Immerhin hat sich die Eichtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung als brauchbarer Ansatz erwiesen, da er ihre auf der Eichsymmetrie beruhende tiefgreifende Analogie zur QED bestätigt hat. Die Theorie besagt, daß von den vier insgesamt vorhandenen Vektorbosonen drei durch spontane Symmetriebrechung Massen erhalten sollen.

Was nun die derzeitigen Möglichkeiten der Hochenergiephysik anbetrifft, so ist der weitaus größte Teil der in Laboratorien installierten Beschleuniger für die Untersuchung der Elementarteilchenphysik ungeeignet. Derzeit erfolgen die meisten Messungen in Speicherringanlagen. Deren Leistungsfähigkeit läßt sich mit gegenwärtigen technischen Einrichtungen und den dafür verfügbaren finanziellen Mitteln nur noch relativ geringfügig steigern. Die Größen, die im Experiment bestimmt werden, sind z.B. die Energie eines Teilchens, sein Impuls, seine Masse, sein Spin, sein Bahndrehimpuls, seine Ladung. Dabei ist zu bedenken, daß sich alle submikroskopischen Teilchen einer direkten Beobachtung entziehen. Deshalb sind geeignete Detektoren - also solche, die alle erforderlichen Bestimmungsstücke gleichzeitig messen - mit anschließender elektronischer Signal- und Datenverarbeitung notwendig.

Insgesamt beurteilt, sind die theoretischen Grundlagen der Elementarteilchenphysik bezüglich der vier Elementarkräfte eher inkonsistent als realitätsnah. Die entsprechenden Quantenfeldtheorien unterscheiden sich in ihrer Entwicklung als auch ihrem Verständnis und damit in ihrer Leistungsfähigkeit noch erheblich. Demgegenüber steht eine ausgefeilte, eminent teure Meßtechnik im Einsatz an nahezu unbezahlbaren Versuchsanlagen, deren Beschleunigungsenergien jedoch für die genaue Antwort vieler offener Probleme bei weitem nicht ausreichen.

Aus diesem Grund ist eine alternative Theorie vom hohem Wert, die auf einer sowohl theoretisch als auch experimentell nicht in Frage stehenden Grundlage beruht und einen einfachen Algorithmus benutzt, der die Ruhemassen aller im Standardmodell (SM) klasifizierten, mehr als 61 Teilchen inklusive der Eichteilchen zu berechnen gestattet. Eine solche Theorie hat Herr Seelig erdacht und ausgearbeitet. Die im vorliegenden Bericht dargelegten physikalischen Überlegungen, begründeten Gleichungen und exemplarischen Resultate können wie folgt thesenartig zusammengefaßt werden:

(1) Die Seelig Theorie (ST) *definiert* ein beliebiges Elementarteilchen (Subskript i) durch ein entsprechendes Paar aus Ruheenergie W_i und der für das Wirkungsvolumen charakteristischen Wellenlänge λ_i , deren Produkt invariant und gleich dem Produkt (hc) aus den beiden Naturkonstanten h und c ist.

(2) Die ST stellt die Verbindung zur Realität durch Referenz auf die Rydberg-Konstante als dem Grenzwert her, der den Übergang vom gebundenen Elektron im Wasserstoffatom zum freien Elektron (et vice versa) quantitativ fixiert.

-
- (3) Die ST enthält ein Element im Sinne der antiken Vorstellung, die sich auf eine irreduzible materielle Entität mit einer charakteristischen räumlichen Ausdehnung bezieht. Dieses Basis-Elementarteilchen wird mit Haplon bezeichnet und ist durch eine Wellenlänge charakterisiert, die mit dem Ersten Bohrschen Radius des Wasserstoffatoms übereinstimmt.
- (4) Durch das Haplon wird axiomatisch ein Faktor - die Seelig Konstante - eingeführt, der als 'Krümmungsfaktor' die geometrische Veränderung des Wirkungsvolumens beim Übergang vom Haplon zum Wasserstoffatom ausdrückt und nahezu identisch ist mit dem reziproken Wert der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten.
- (5) Potenzen der Seelig Konstanten erweisen sich als zentrale Parameter für die Berechnung aller Elementarteilchen, aber auch der elektrischen Elementarladung.
- (6) Die ST modelliert die beiden Produktfaktoren W_i und λ_i des i -ten Teilchens durch Berücksichtigung teilchenspezifischer geometrischer Faktoren, die wesentlich vom Haplon-Volumen bedingt sind.

Herrn Seelig Theorie liefert Ruhemassen, deren Zahlenwerte für alle untersuchten Elementarteilchen, aber auch für alle bekannten Eichteilchen überraschend gut mit experimentellen Werten übereinstimmen. Sie offeriert sogar im Rahmen ihres Berechnungsschemas erstmals die Möglichkeit, die Ruhemasse der bis heute spekulativen Gravitonen als Eich-Boson des Gravitationsfeldes zu ermitteln. Dieses Beispiel demonstriert, daß im Falle eines nicht zum SM gehörenden Teilchens zusätzliche Informationen wie das Newtonsche Gravitationsgesetz für die unter Punkt (6) angesprochene Modellierung erforderlich sind.

Neben dem vergleichsweise bescheidenen mathematischen Aufwand (aber einem allerdings beträchtlichen Maß an konzeptioneller Phantasie) besteht der maßgebliche Vorzug der ST in ihrer inneren Konsistenz. Bemerkenswert ist zudem die quasigeometrische Darstellung der Feinstrukturkonstanten, die, wie im Anhang beschrieben, in den letzten Jahrzehnten Gegenstand zahlreicher Untersuchungen von vielen bedeutendsten Physiker war.

7. Appendix

7.1 Die "Bohr-Sommerfeld-Quantentheorie"

Die Absicht dieser Darstellung ist,

- a) die Entstehung und Grundbedingungen der "klassischen Bohrschen Atomtheorie" vorzutragen, kritische Punkte zu benennen;
- b) die Sommerfeldsche Umformung und Ergebnisse vorzustellen (Wasserstoffatom);
- c) die Theorie der Feinstruktur und die Bedeutung der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten im Rahmen der Sommerfeld-Theorie zu beschreiben.

7.1.1. Die Entstehung und Bedeutung der klassischen Bohrschen Atomtheorie

Es war ein glücklicher Umstand, daß Bohr seine Laufbahn bei Rutherford begonnen hat. Rutherford war als Experimentalphysiker von der Richtigkeit der Planckschen Quantenhypothese schon deshalb überzeugt, weil aus ihr unter anderem die Größe der elektrischen Elementarladung richtig bestimmt werden konnte. So hat er die Bestrebungen des theoretischen Physikers Bohr wohlwollend gefördert, das von ihm, Rutherford, geschaffene Atommodell mit der Quantenhypothese zu verbinden.

Die Bohrsche Atomtheorie in der Form, wie wir sie auch heutzutage in Physiklehrbüchern finden können, ist 1913 erschienen. (Vgl.: Bohr, N. (1912-1927), S. 159-239; die deutsche Übersetzung in: Bohr, N. (1964) S.33-101). Die Grundpostulate der Theorie sind:

Die Elektronen können im Atom nur auf bestimmten Bahnen um den Kern umlaufen. Die Elektronen auf diesen Bahnen strahlen im Gegensatz zu den Gesetzen der Maxwell'schen Elektrodynamik keine Energie ab. Für eine Kreisbahn ergeben sich die Bahnradien aus der Forderung, daß der Drehimpuls der umlaufenden Elektronen nur ganzzahlig vielfache Werte von $h/2\pi$ annehmen kann:

$$mv_n r_n = nh/(2\pi) \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots \quad (\text{Auswahlregel})$$

Das Atom strahlt nur dann, wenn ein Elektron von einer Bahn auf eine andere "springt". Die Frequenz des ausgestrahlten Lichtes ergibt sich aus der *Bohrschen Frequenzbedingung* zu

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1}.$$

In dieser Beziehung ist E_{n_1} die Energie eines Elektrons auf einer Bahn mit der Quantenzahl n_1 und E_{n_2} die Energie zur Quantenzahl n_2 ; h ist die Plancksche Konstante. Folglich strahlt das Elektron bei einem Übergang von einer Bahn auf eine andere die Energiedifferenz zwischen den beiden Bahnenergien in Form eines einzigen Photons aus. Bei der Strahlungsabsorption spielt sich natürlich der umgekehrte Vorgang ab. Das Atom kann nur die Photonen $h\nu$ absorbieren, die in der Lage sind, Elektronen von einer niederenergetischen Bahn auf eine höherenergetische anzuheben.

Bohrs grundlegende Arbeit erschien in drei Teilen in einem Gesamtumfang von 80 Seiten. "Sie müßte gekürzt werden" - meinte Rutherford (vgl. Simonyi, K. (1990), S.437¹) Am Ende dieser

¹Vgl. weiter Hoyer, U. (1974), S. 125-126: in einem Brief am 20.3.1913 schreibt Rutherford an Bohr noch während der Ausarbeitung der Artikel: "Ich habe Ihre Arbeit wohlbehalten empfangen und mit großem Interesse gelesen. Ihre Ideen bezüglich des Ursprungs von Spektrum und Wasserstoff sind sehr geistreich und scheinen gut zu funktionieren, aber die Vermischung von Plancks Ideen mit der alten Mechanik macht es sehr schwierig, sich eine physikalische Vorstellung davon zu bilden, was dem zu Grunde liegt.

Ich finde eine ernsthafte Schwierigkeit in Ihrer Hypothese, von der ich nicht zweifle, daß Sie sie vollkommen wahrnehmen, nämlich wie ein Elektron entscheidet, mit welcher Frequenz es schwingen wird, wenn es von einem stationären Zustand zu einem anderen übergeht? Es scheint mir, daß Sie annehmen müssen, daß das Elektron von vorneherein weiß, wo es haltmachen wird. Ich habe noch eine Kritik geringfügiger Art, die die Form Ihres Aufsatzes betrifft. Ich glaube, daß Sie in dem Bemühen, klar zu sein, die Neigung haben, Ihre Arbeiten zu sehr auszudehnen und Ihre Annahmen an verschiedenen Stellen Ihrer Arbeit zu wiederholen. Ich glaube wirklich, daß Ihre Arbeit eine Kürzung verträgt, und bin der Meinung, daß dies ohne jedes Opfer an Klarheit geschehen könnte. Ich weiß nicht, ob Sie die Tatsache richtig einschätzen, daß lange Arbeiten Leser, die nicht Zeit haben, darin einzudringen, abschrecken." Vgl. noch Bohr, N (1912-1917), S. 127-130: "Omitted Parts of the Trilogy", bzw. einen anderen, von A. Hermann zitierten Brief von Rutherford: "...Ich betrachte es wirklich als wünschenswert, daß Sie einige

Artikel faßte Bohr die Grundannahmen seiner Theorie zusammen:

- “1. Energiestrahlung wird nicht in kontinuierlicher Weise emittiert (oder absorbiert), wie dies in der gewöhnlichen Elektrodynamik angenommen wird, sondern nur während des Überganges der Systeme von einem “stationären” Zustand in einen anderen.
2. Das dynamische Gleichgewicht der Systeme in den stationären Zuständen wird durch die gewöhnlichen Gesetze der Mechanik bestimmt, während diese Gesetze nicht für Übergänge der Systeme zwischen den verschiedenen stationären Zuständen gelten.
3. Die während des Überganges eines Systems zwischen zwei stationären Zuständen emittierte Strahlung ist homogen, und die Beziehung zwischen der Frequenz ν und der Gesamtmenge ausgestrahlter Energie E ist gegeben durch $E = h\nu$, wo h Plancks Konstante ist.
4. Die verschiedenen stationären Zustände eines einfachen Systems, das aus einem um einen positiven Kern rotierenden Elektron besteht, sind durch die Bedingung bestimmt, daß das Verhältnis zwischen der gesamten während der Bildung der betreffenden Konfiguration emittierten Energie und der Umlaufzahl des Elektrons ein ganzes Vielfaches von $h/2$ ist. Vorausgesetzt, daß die Bahn des Elektrons kreisförmig ist, ist diese Annahme gleichbedeutend mit der, daß das Impuls-Moment eines den Kern umkreisenden Elektrons gleich einem ganzen Vielfachen von $h/2\pi$ ist.
5. Der “permanente” Zustand eines jeden atomistischen Systems - d.h. der Zustand, bei welchem die emittierte Energie ein Maximum ist - wird bestimmt durch die Bedingung, daß das Impuls-Moment eines jeden Elektrons um den Mittelpunkt seiner Bahn gleich $h/2\pi$ ist.” (Bohr, N. (1964); S.100-101)²

von den Diskussionen abkürzen, um (den Aufsatz) auf einen vernünftigen Umfang zu bringen. Wie Sie wissen, ist es Sitte in England, die Dinge kurz und bündig zu fassen im Gegensatz zur germanischen Methode (Germanic method), wo es als Verdienst gilt, so umständlich wie möglich zu sein...” (Hermann, A. (1964), S.23)

²Die englische Version lautet:

- “1. That energy radiation is not emitted (or absorbed) in the continuous way assumed in the ordinary electrodynamics, but only during the passing of the systems between different “stationary” states.
2. That the dynamical equilibrium of the systems in the stationary states is governed by the ordinary laws of mechanics, while these laws do not hold for the passing of the systems between the different stationary states.

Die Bohrschen Postulate können nicht auf einfachere Grundannahmen zurückgeführt werden. Sie müssen auf dieser Stufe der Darstellung als Grundgesetze betrachtet werden, mit deren Hilfe dann komplizierte Phänomene verstanden werden können. Die Berechtigung dieser Postulate ist nicht unmittelbar einzusehen, sondern ergibt sich daraus, daß die aus ihnen gezogenen Schlußfolgerungen mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmen.

Die Annahme, daß ein Elektron im Atom stationär auf einer Kreisbahn um den Atomkern umlaufen kann, ohne dabei nach den Gesetzen der klassischen Maxwell'schen Physik abstrahlen zu müssen, hat den heftigsten Widerspruch hervorgerufen: "Das ist Unsinn, die Maxwell'schen Gleichungen gelten unter allen Umständen, ein Elektron auf Kreisbahn muß strahlen" - sagte M. von Laue (zitiert in: Simonyi (1990): S.437; bzw. in: Jammer (1966): S.86, Ref. 106); "Sehr merkwürdig, da muß etwas dahinter sein; ich glaube nicht, daß die Rydberg-Konstante durch Zufall in absoluten Werten ausgedrückt richtig herauskommt." - äußerte sich Einstein (zitiert in: Jammer, M. (1966), S.86, Ref. 107; bzw. Simonyi (1990): S.437).

Die Bohrsche Theorie hatte auf zwei Kardinalfragen eine Antwort zu geben. Die erste Frage ist die nach ihrem Verhältnis zur klassischen Physik im allgemeinen sowie zum Strahlungsgesetz der klassischen Physik im besonderen, und die zweite nach der Verallgemeinerung der Quantisierungsbedingung für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden. Auf diese Fragen haben zunächst Bohr selbst (Vgl. Bohr (1912-1917), S. 117-133 (Introduction von U.Hoyer); bzw. die

3. That the radiation emitted during the transition of a system between two stationary states is homogeneous, and that the relation between the frequency ν and the total amount of energy emitted E is given by $E = h\nu$, where h is Planck's constant.

4. That the different stationary states of a simple system consisting of an electron rotating round a positive nucleus are determined by the condition that the ratio between the total energy, emitted during the formation of the configuration, and the frequency of revolution of the electron is an entire multiple of $h/2$. Assuming that the orbit of the electron is circular, this assumption is equivalent with the assumption that the angular momentum of the electron round the nucleus is equal to an entire multiple of $h/(2p)$.

5. That the "permanent" state of any atomic system - i. e., the state in which the energy emitted is maximum - is determined by the condition that the angular momentum of every electron round the centre of its orbit is equal to $h/(2p)$." (Bohr, N. (1912-1927), S. 232-233)

Artikel mit Nr. IV, VI, IX, X, XII, bzw. vgl. noch Hoyer, U. (1974) S.134ff), dann aber auch Ehrenfest³ und Sommerfeld (s. nächster Abschnitt) eine Antwort gegeben. Die Bohrsche Atomtheorie hat in dem *Sommerfeldschen Ellipsenmodell* einen gewissen Abschluß gefunden. (Vgl. Hermann, A. (1964), S.31)

Die größte Leistung der Theorie ist, daß sie die Existenz der diskreten Energieniveaus erklären sowie in den einfachsten Fällen die aus den Spektralanalysen stammenden Zahlenwerte mit den physikalischen Grundkonstanten in Verbindung bringen kann. Als einfachste Anwendung der Theorie betrachten wir ein Wasserstoffatom. Aus der Bohrschen Auswahlregel

$$mv_n r_n = nh/(2\pi)$$

und aus der Bewegungsgleichung des auf einer Kreisbahn umlaufenden Elektrons

$$mv_n^2/r_n = e^2/r_n^2$$

ergibt sich die Gesamtenergie des Elektrons:

$$E_n = E_{kin} + E_{pot} = (1/2)mv_n^2 - e^2/r_n.$$

³ Bohr hat die fundamentale Quantenbedingung seiner Theorie in späteren Arbeiten in Form von $T_n = (1/2)nh\omega_n$ geschrieben (und unter T_n den zeitlichen Mittelwert der kinetischen Energie verstanden). Für kreisförmige Bewegungen folgt daraus unmittelbar die oben angegebene Quantenbedingung. In einem späteren Aufsatz über die Quantentheorie periodischer Systeme hat Bohr diese Quantenbedingung mit der Ehrenfestschen Adiabatenhypothese in Verbindung gebracht. Danach waren nicht mehr der Drehimpuls oder das Verhältnis von Gesamtenergie und Umlauffrequenz (bei rotationssymmetrischen Anordnungen kinetischer Energie und Umlauffrequenz) die fundamentalen, einer Quantenbedingung zu unterwerfenden Größen, sondern eine bei adiabatischen (gegenüber der Periode langsamen) Änderungen invariante Größe (Vgl. Hoyer, U. (1974), S. 256-257; ausführlich ausgearbeitet ist das Verhältnis der Quantenbedingung zum adiabatischen Prinzip in: Jammer, M. (1966), S. 89-109; besonderen Verdienst hat P. Ehrenfest in diesem Bereich - vgl. Jammer, M. (1966), S.98, die entsprechende Literatur in Ref. 45-51; bzw. Mehra, J. Und Rechenberg, H. (1982), S. 233-238.

Die Frequenzbedingung $h\nu = E_{n_2} - E_{n_1}$ führt zum folgenden Ausdruck für die Wellenzahl:

$$1/\lambda = \nu/c = ((2\pi^2 me^4)/(ch^3))(1/n_1^2 - 1/n_2^2)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit den experimentellen Werten der Spektralanalyse gut überein.

Dieses Resultat wurde durch die sogenannte "Massenkorrektur" noch verbessert. Dabei wurde die Mitbewegung des Kernes endlicher Masse berücksichtigt. Es tritt dann in den ursprünglichen Formeln für Radius, Umlauffrequenz und Gesamtenergie an Stelle der Elektronenmasse m die reduzierte Masse ($mM/(m+M)$), und zwar unabhängig davon, ob man die kinetische Energie von Elektron und Kern oder die abgestrahlte Energie (die Summe aus kinetischer und potentieller Energie von Kern und Elektron) gemäß der allgemeinen Vorschrift quantisiert. (Vgl. Hoyer, U. (1974) S.170-173; bzw. Nagy, K. (1981) S. 40 und Jammer, M. (1966) S.84-85)

Die Bohr-Theorie erfuhr zunächst nur sehr geringe Resonanz. In dieser Zeit ermutigte G. von Hevesy Bohr mit seiner freundschaftlichen Haltung (Vgl. Hermann, A. (1964), S.27): "You will understand now why the reading of your papers has been a source of pleasure to me. I look forward with very much interest to the result of your more elaborated calculations, so far everything is so clear, the behaviour of hydrogen and helium as described by the theory, so truefull that nobody can avoid to be struck by reading it." (Bohr, N. (1912-1917), S.122-123) Öffentliche Anerkennung zollte auch Norman Campbell, Hon. Fellow der Universität Leeds; in *Nature* vom 22. Januar 1914 schrieb er in seinem Aufsatz über "Die Struktur des Atoms"⁴: "...Bohrs Theorie erklärt mehr als irgendeine frühere oder rivalisierende Theorie, aber sie erklärt nicht alles. Sie führt neue Annahmen ein, von denen manche zweifelhaft sind und vielleicht aufgegeben werden müssen. Ihr großes Interesse liegt weniger in der Art der Vorstellungen, die sie zugrundelegt, als in der genauen Erklärung der atomaren Eigenschaften, auf die sie führt. Sie (die Bohrsche Theorie) ersetzt nicht nur die Prinzipien der Mechanik, die abzuschaffen selbst die Konservativsten langsam gezwungen werden, sondern zeigt sogar, daß grundlegende Annahmen

⁴Nature. Vol.92, 1913/14, S.586f. Zitiert in: Hermann, A. (1964), S.28

ihren Platz einnehmen müssen. Der Versuch, die Bohrsche Theorie in den Begriffen dieser (alten) Prinzipien zu erklären, ist vergeblich, die Erklärung, warum manche Sätze falsch sind, ist unmöglich, wenn man annimmt, daß sie richtig sind.

Es gibt nur zwei Möglichkeiten für den modernen theoretischen Physiker: Man kann entweder annehmen, daß die Prinzipien der alten Mechanik richtig sind und daß all die glänzenden Ergebnisse, die aus der Anwendung der Vorstellungen von Planck und Einstein auf die verschiedenen Erscheinungen resultieren, Täuschung sind und keinen wirklichen Wert haben; oder man kann annehmen, daß sie (die Prinzipien der alten Mechanik) nicht richtig sind. Die Bohrsche Theorie stellt diese Wahl in schärfster Zuspitzung."

Die Bohrsche Atomtheorie, die in der Analyse periodischer Bewegungen bedeutende Erfolge zeitigte, gelangte an die Grenze ihrer Leistungsfähigkeit, sobald bedingt-periodische Bewegungen auftraten. In der Diskussion der Mehrelektronensysteme, der magnetischen und elektrischen Erscheinungen und der relativistischen Elektronenbewegung erzielte Bohr günstigstenfalls Teilerfolge, die um den Preis gewisser Spezialisierungen erreicht worden sind. In erster Linie geht es darum, daß die periodischen Bewegungen in dieser Theorie eine bevorzugte Rolle spielen. Sind die Bewegungen nämlich nicht mehr periodisch, so bedarf es zur Festlegung der Anfangsbedingungen im allgemeinen *zweier* zusätzlicher Gleichungen, im Falle räumlicher Bewegung *dreier* und im Falle der Bewegung mehrerer Teilchen einer entsprechend größeren Anzahl. In diesem Sinne klärt sich auf, warum Drehimpuls und Gesamtenergie in Bohrs Theorie die beherrschenden Größen waren. Wir zitieren die grundlegenden Schlußfolgerungen der Habilitationsschrift von U.Hoyer: "In beiden Fällen (nämlich im Fall des Drehimpulses und der Gesamtenergie - Bem. d. Autors) handelt es sich gerade um Konstante der Bewegung (wenn nämlich, wie im Falle des Wasserstoffatoms, die Anziehungskraft zentral und konservativ ist). Diese Konstanten sind durch die Anfangsbedingungen bestimmt, wie sich auch umgekehrt die Anfangsbedingungen durch sie darstellen lassen. Forderungen an den Drehimpuls und die Gesamtenergie enthielten deshalb implizite Forderungen an die Anfangsbedingungen. Bei periodischen Bewegungen tritt der besondere Fall ein, daß die eine Größe durch die andere festgelegt ist. Daraus resultiert die Doppeldeutigkeit der Bohrschen Theorie hinsichtlich der fundamentalen Quantenbedingung: Gesamtenergie und Drehimpuls sind in diesem Falle als zu

quantisierende Größen gleichberechtigt. Daß indessen die Konstanz des Drehimpulses, die in der Entwicklung der Bohrschen Theorie im Vordergrund stand, nicht die allein entscheidende Quantenbedingung sein konnte, deutete sich in der Behandlung des relativistischen Wasserstoffatoms an, die trotz Drehimpulserhaltung von Bohr nicht in allgemeiner Form durchgeführt werden konnte.

Bohr sind diese Züge seiner Theorie entgangen. Fragt man nach Ursache, so liegt sie wesentlich in seiner frühzeitig gewonnenen, schon in der Dissertation klar zum Ausdruck gelangenden und von der Allgemeinheit der damaligen Physiker geteilten Überzeugung, daß klassische Mechanik und Elektrodynamik einer grundlegenden Revision bedürftig seien." (Hoyer, U. (1974), S.256-257).

Dieser Aspekt spielte auch bei Bohrs späteren Überlegungen eine Rolle. Kramers schrieb 1923 bezüglich des Korrespondenzprinzips: "Bohr hat sich in Gesprächen wohl folgendermaßen ausgedrückt: Sowohl die klassische Theorie wie die Quantentheorie sind beide als Naturbeschreibung nur eine Karikatur; sie gestattet sozusagen in zwei extremen Erscheinungsgebieten eine asymptotische Darstellung des wirklichen Geschehens."⁵

Wie erwähnt, wurde durch die Arbeiten Sommerfelds und seiner Schüler schon etwa fünf Jahre nach der ersten Veröffentlichung ein gewisser Abschluß in der mathematischen Entwicklung des quantentheoretischen Atommodells erreicht. 1919 erschien die erste Auflage des Buches "Atombau und Spektrallinien" (Wir zitieren nach der 3. Auflage). Sommerfeld sprach hier im Vorwort das berühmte gewordene Wort aus: "Was wir heutzutage aus der Sprache der Spektren heraus hören, ist eine wirkliche Sphärenmusik des Atoms, ein Zusammenklingen ganzzahliger Verhältnisse, eine bei aller Mannigfaltigkeit zunehmende Ordnung und Harmonie. Für alle Zeiten wird die Theorie der Spektrallinien den Namen Bohrs tragen. Aber noch ein anderer Name wird dauernd mit ihr verknüpft sein, der Name Plancks. Alle ganzzahligen Gesetze der Spektrallinien und der Atomistik fließen letzten Endes aus der Quantentheorie. Sie ist das geheimnisvolle

⁵H.A.Kramers, "Das Korrespondenzprinzip und der Schalenbau des Atoms", Die Naturwissenschaften 11, 550-559 (1923), Zitat auf S.559, zitiert in: Jammer, M. (1966), S.117, Ref. 124

Organon, auf dem die Natur die Spektralmusik spielt und nach dessen Rhythmus sie den Bau der Atome und der Kerne regelt." (Sommerfeld, A. (1922), S.V)

Zu diesen Namen gehört mit Sicherheit auch der Name "Sommerfeld". Seine detaillierten Rechnungen trugen im wesentlichen dazu bei, daß das Bohrsche Atommodell noch heute anwendbar ist. Mit ihm hat die Theorie ihre syntaktische, formalistische, mathematische Vollkommenheit erreicht. Die nächsten zwei Abschnitte versuchen, seine Überlegungen darzustellen.

7.1.2. Die Sommerfeldsche Umformung und ihre Ergebnisse

Die Vertreter der frühen Quantentheorie beschäftigten sich zunächst nur mit Systemen mit einem Freiheitsgrade. Erst durch Planck wurde die Quantelungsvorschrift in eine allgemeinere Form gebracht⁶. (Vgl. Mehra, J. und Rechenberg, H. (1982), S.206). Im Jahre 1915 schrieb Jun Ishiwara (oder Ishihara) einen Artikel, in dem er das später auch vom Sommerfeld eingeführte Phasenintegral benutzte. (Vgl. Mehra, J. und Rechenberg, H. (1982), S.210-211) Bezüglich von Phasenintegralen und Ellipsenbahnen hat W. Wilson früher als Sommerfeld wesentliche Ergebnisse erreicht hat. (Vgl. Sommerfeld, A. (1922), S. 246, Fußnote 3, bzw. S. 289)⁷ In

⁶M. Planck: *Eine neue Strahlungshypothese*, in: Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. (2) 13, 138-148 (vorgetragen am 11.2.1911), neugedruckt in: *Physikalische Abhandlungen und Vorträge II* (Planck, 1958), S.249-259.

⁷Eine detaillierte historische Darstellung findet man in: Mehra, J. und Rechenberg, H. (1982), S.206-218; auf S. 211, in Fußnote 333: "In a letter, dated 7 June 1920, Wilson drew Sommerfeld's attention to the fact that he had published the quantum conditions for systems having several degrees of freedom already in his first paper of June 1915. Sommerfeld admitted in his reply: 'You are right in that I should have quoted your 1915 papers in my book (*Atombau und Spektrallinien*), as I did in my paper in the *Annalen der Physik*, Volume 51, 1916, p.9' (Sommerfeld to Wilson, 14 July 1920). And he promised to cite Wilson in the second edition of *Atombau und Spektrallinien*. Sommerfeld further stated in his letter to Wilson that he had developed the extension of Bohr's theory - independly of Wilson - in winter 1914-15, but that he had delayed the publication until Paschen had tested the fine-structure formula experimently. He concluded by stating. 'The priority for the publication of the rule $\int pdq = nh$ belongs to you without doubt' (Sommerfeld to Wilson, 14 July 1920)" vgl. noch die Fußnote 335 auf S.213, wo Sommerfeld zitiert wird: "My extension of Bohr's theory (elliptical orbits, fine structure) was

diesem Abschnitt werden wir die wichtigsten Annahmen und Ergebnisse der Sommerfeldschen Erweiterung aufgrund des 4. Kapitels seines Buches (Sommerfeld, A. (1922)) kurz zusammenfassen.

Das Bohrsche Atommodell rekapituliert Sommerfeld so: "Bezüglich des Auftretens dieser verschiedenen Kreisbahnen möge schon hier folgendes bemerkt werden: Die innerste Bahn (...) ist die stabilste; in der Regel befindet sich das Wasserstoffelektron in dieser Bahn. Durch eine Anregung von außen (Wärmebewegung, elektrische Felder, Zusammenstöße) wird aber gelegentlich das Elektron in eine der äußeren Bahnen (...) entfernt, die es gleichfalls stationär, aber mit geringerer Stabilität durchläuft. Sich selbst überlassen fällt es früher oder später in die innerste Bahn oder allgemeiner in eine mehr nach innen gelegene zurück. Nur bei diesen Übergängen wird Energie ausgestrahlt, nämlich der Energieunterschied zwischen der Anfangs- und der Endbahn des Elektrons.

Das Wasserstoffatom ist das Vorbild für alle weiteren Atommodelle, an dem sich die ganze Theorie der Spektrallinien entwickelt hat. Der Grund ist leicht zu verstehen: Nur beim Wasserstoffatom befinden wir uns im einfachen Falle des Zweikörperproblems; alle übrigen Atome stellen uns vor die berüchtigten Schwierigkeiten des Drei- und Mehrkörperproblems." (Sommerfeld, A. (1922), S. 82-83).

Zuerst entwickelt er die Quantenbedingung (Auswahlregel) mit Hilfe des Begriff des Phasenraumes im Fall eines Freiheitsgrades. In der Phasenebene eines Systems von einem Freiheitsgrad bezeichnet man q und p (die verallgemeinerte Lagekoordinate und der konjugierte Impuls) als rechtwinklige Koordinaten. "Wir konstruieren uns in dieser Ebene die 'Phasenbahnen', das heißt die Folge derjenigen Bildpunkte, welche den aufeinanderfolgenden Bewegungszuständen des Systems entsprechen. Von jedem Punkt als Anfangszustand ausgehend, könnten wir solche Phasenbahnen verzeichnen und mit ihnen die Phasenebene überall dicht überdecken. Es ist aber für die Quantentheorie charakteristisch, daß sie eine diskrete Schar von Phasenbahnen aus der unendlichen Mannigfaltigkeit derselben herausgreift. Um dieselben zu

already presented in winter 1914-15 in my lecture course, but was first published in the beginning of 1916".

definieren, betrachten wir zunächst den Flächeninhalt der Phasenebene, der von zwei beliebigen Phasenbahnen begrenzt wird und nennen ihn 'Phasenausdehnung'. Sodann zeichnen wir unsere Schar so, daß die Phasenausdehnung zwischen zwei ihrer Nachbarkurven stets gleich dem Wirkungsquantum h sei. h gewinnt dadurch die Bedeutung des *Elementarbereichs der Phasenausdehnung*. Diese Bedeutung werden wir als die eigentliche Definition des Planckschen Wirkungsquantum h ansehen." (Sommerfeld, A. (1922), S.240) Diese Idee führt natürlicherweise zum Begriff des Phasenintegrals, und damit zu der verallgemeinerte Quantenbedingung (Auswahlregel). Seine diesbezüglichen Überlegungen setzt Sommerfeld so fort: "Der Bildpunkt des Systems in der Phasenebene ist an gewisse quantentheoretisch ausgezeichnete 'gequantelte' Phasenbahnen gebunden. Jede derselben schließt mit der folgenden ein Elementargebiet der Größe h ein. Die n te dieser Bahnen hat (wenn geschlossen) den Flächeninhalt nh . In Formeln:

$$\iint dpdq = nh,$$

das Integral erstreckt sich über das Innere der n ten Bahn. Führen wir die Integration nach p aus (...), so entsteht

$$\int pdq = nh, \quad (*)$$

dieses Integral erstreckt über die n te Bahn selbst. Die linke Seite dieser Gleichung nennen wir *Phasenintegral* und bezeichnen sie mit J . (...) Die definitive Formulierung der Quantenhypothese sehen wir in der Forderung, daß das Phasenintegral ein ganzes Vielfaches des Wirkungsquantums h sein solle. Diese Forderung sondert aus der kontinuierlichen Mannigfaltigkeit aller mechanisch möglichen Bewegungen eine diskret unendliche Anzahl wirklicher, quantentheoretisch möglicher Bewegungen aus." (Sommerfeld, A. (1922), S. 243).

Den Fall eines Freiheitsgrades verallgemeinerte Sommerfeld für den Fall von f Freiheitsgraden: "In diesem Falle müssen wir nicht eine Quantenbedingung der Form (*) verlangen, sondern f verschiedene Quantenbedingungen, durch die jeder der f Freiheitsgrade in gewissem Sinne festgelegt wird." (Sommerfeld, A. (1922), S.245) Die Vorschrift von Sommerfeld besagt: "Man übertrage die Bedingung (*) auf jeden einzelnen Freiheitsgrad des Systems, schreibe also den Wert des Phasenintegrals für den k ten Freiheitsgrad als ganzes Vielfaches von h vor:

$$\int p_k dq_k = n_k h. \quad (**)$$

(...) In gewissen Ausnahmefällen, bei den sogenannten entarteten Systemen, reduziert sich die

Zahl der erforderlichen Bedingungen; dann genügen bei f Freiheitsgraden bereits weniger als f Quantenbedingungen, um die Schärfe der von dem System emittierten Spektrallinien zu gewährleisten. (...) Das Phasenintegral J ist eine notwendig positive Größe; die ganze Zahl n in (***) ist also eine positive ganze Zahl. Eigentlich folgt diese Eigenschaft schon aus der geometrischen Bedeutung des Phasenintegrals." (Sommerfeld (1922), S.246)

Was die Auswahlregel betrifft, faßte Sommerfeld so zusammen: "Diese gequantelten Zustände sind vor allen übrigen Möglichkeiten als stationäre Zustände des Systems ganzzahlig hervorgehoben; sie schließen sich nicht stetig aneinander, sondern bilden ein Netzwerk. In den zugehörigen Bahnen bewegt sich ein Elektron dauernd und widerstandlos, das heißt ohne auszustrahlen; das Elektron ist quantentheoretisch gegen Ausstrahlung sozusagen immunisiert. Der Phasenraum, als Mannigfaltigkeit aller denkbaren, auch der nichtstationären Zustände, ist von den Bildkurven der stationären Bahnen maschenartig durchzogen. Die Größe der Maschen ist durch das Plancksche h bestimmt." (Sommerfeld (1922), S. 248)

Sommerfeld nimmt auch die Frequenzbedingung von Bohr an. Dafür gibt er keine ausführliche Begründung an, jedenfalls bezog er sich auf eine Arbeit von L. Flamm⁸ mit der Bemerkung: "Diese Auffassung will aber durchaus keine zwangsläufige Begründung der Gleichung sein, schon wegen der dabei erforderlichen, im folgenden hervorzuhebenden Hilfsannahmen, sondern lediglich ein Mittel zur Veranschaulichung. Neben das Atom, welches die Strahlung anregt, stellen wir den 'Äther', welcher die Strahlung fortpflanzt. Man spricht zwar heutzutage nicht gern vom Äther, seitdem ihm durch die Relativitätstheorie seine materielle Existenz im älteren Sinne genommen ist. (...) Wir wollen hier mit dem Worte Äther nichts anderes ausdrücken, als die Möglichkeit von *Schwingungszuständen* mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c , wie sie sich uns in der Erfahrung überall darbieten und durch die elektrodynamisch-optische Theorie näher umschrieben werden. In diesem Sinne definieren wir den Äther als Oscillator. (...) Der Äther stellt also nicht einen Oscillator, sondern ein unendliches System von Oscillatoren dar, in dem die Eigenschwingungszahl kontinuierlich von Oscillator zu Oscillator variiert, sozusagen ein

⁸In. Physikal. Zeitschr. 19, 116 (1918); besonders S.125