

BALOGH VILMOS SZILÁRD

MIÉRT ÚR

SZÁZ ÉVE SZÜLETETT KURT GÖDEL

A szerző matematika-fizika szakos gimnáziumi tanár Bajorországban és elméleti fizikus tudományos kutató a német Szövetségi Véderő münchen-neubibergi egyetemén. Legutóbbi szemléit 2001/4. és 2004/1. számunkban közzétük.

A Gödel utolsó éveiből származó fényképekre nézve kissé megkeseredett, rezervált, enyhén alultáplált férfi tekint ránk. Nevét a logikát, filozófiát és matematikát üzökön kívül a közelmúltig kevesen ismerték, jóllehet teljesítménye – ha egyáltalán összehasonlítható – legalább annyira jelentős, mint a fizikát a 20. században forradalmasító fizikusoké, *Bohré, Einsteiné, Schrödingeré, Heisenbergé*, hogy csak néhányat említsünk közülük. A bécsi egyetemen századik születésnapjára összeállított kiállítás internetes oldala [20] így mutatja be Gödelt:

„2006 – Bécs egy zsenit ünnepel”: kétségtelenül *Mozart*ra gondolunk. De Bécs Kurt Gödel századik születésnapját is ünnepli. Nem annyira ismert, mint Mozart, de ugyanúgy zseni, akire Bécsnek tisztelettel kell emlékezni. A *Time* magazin a huszadik század száz legfontosabb személyisége között tartja számon. A Harvard Egyetem tiszteletbeli doktorává avatta a „század legjelentősebb matematikai igazságának felfedezéséért”. Általában is *Arisztotelész* óta ő tekinthető a legnagyobb logikai gondolkodónak. Barátja, *Einstein* saját bevallása szerint csak azért ment el naponta az intézetbe, hogy Gödelt a hazafelé vezető úton elkísérhesse. *Neumann János*, a számítógép atyja szerint: „Gödel tényleg abszolút pótolhatatlan. Ő az egyetlen élő matematikus, akiről ezt merem állítani.”

A fentebb említett ismeretlenségből sokak számára Gödel neve az utolsó két és fél évtizedben egy „slágerkönyv” nyomán bukkant fel. 1979-ben jelentette meg először angolul a fizikai Nobel-díjas *Hofstadter* fia, *Douglas Hofstadter* azt a kötetet [16], amely egyfajta kultuszkönyvvé vált, és ezzel együtt Gödel neve is divatos beszédtema lett.¹ Ugyancsak a Gödel körüli köd eloszlatásához járult hozzá összes műveinek gyűjteményes kiadása ([7]-[12]). A tudományos igényeknek is eleget tevő biográfia megírásának nehézségeit egyik legkiemelkedőbb ismerője, *Dawson* így foglalja össze²:

Mivel Gödel ismerőseinek köre kicsi volt, életének megírásakor az interjúk helyett gyakran az írásos forrásokra vagyunk utalva. Ezeknek a forrásoknak a legfontosabb gyűjteménye Gödel hagyatéka... Ebből kiderül, hogy Gödel csaknem minden cédulát megőrzött, ami valaha is íróasztalára került: könyvtári kölcsönzésről szóló bizonylatokat, csomagvényeket, matematikai amatőrök, autogramvadászok és elmeháborodottak leveleit. Ilyen módon hagyatéka egyfajta tudósoknak való ásatási hely, ahol – ha valaki átrágja magát a mellékes dolgok tömkelegén – értékes információkra találhat.

A hagyatékon túlmenően négy másik fő forrás áll rendelkezésünkre Gödel különböző korszakaiból. Gyermekkorára vonatkozóan testvérenek, *Rudolf Gödel*nek édesanyjukról írt életrajza (R. GÖDEL: *Biographie meiner Mutter Marianne Gödel, 1967*)³. Bécsi évei és a Notre

¹ A kortárs magyar irodalomban is kedves téma lett. L. pl. ESTERHÁZY PÉTER: *Puskás, Gödel, passz*, in: *Élet és Irodalom*, XLIV. évf. 4., 2000. jan. 28., valamint U.Ö: *A Bermuda-háromszög*, u. o. XLVI. Évf. 3., 2002. jan. 18., előadása a Mindentudás Egyetemén 2003. szept. 4-én, *A szavak csodálatos életéről*, online-változat: <http://www.mindentudas.hu/esterhazy/20030904esterhazy1.html>. Vö. még: NÁDOR ZSÓFIA: *Gödel tétele a kombinatorikus költészetben. A kombinatorikus költészet mint formális rendszer*, in: *Világosság*, 2005/4. sz., 21-32. o. (Eötvös Collegium-tanulmányok).

² [3], VIII. o.

³ Vö. még: U. Ö: *Skizze zu einer Chronik der Familie Gödel*, in: [1] 1. kötet, 51–62.o.

Dame-ban töltött szemeszter tekintetében *Karl Menger* visszaemlékezései (1981) rendkívül értékesek.⁴ Az 1945 és 1966 közötti időszakban anyjával folytatott levelezése nyújt betekintést jellemének emberi vonásaiba... Az 1947 és 1977 között eltelt évekhez pótolhatatlanok barátjának, *Oscar Morgensternnek* a naplói....

A Gödel halála óta eltelt időszakban nyomtatásban is megjelent néhány életrajzi jegyzet és áttekintés. Többek között visszaemlékezések *Georg Kreisel*től (1980), *Curt Christian*tól (1980) és *Stephen C. Kleene*-től (1987), saját vázlatom (1984), valamint a *Collected Works* első kötetének előszavaként megjelent, *Solomon Fefermantól* származó kitűnő esszé (1986). *Hao Wang* szintén megjelentetett két könyvet (*Reflections on Kurt Gödel* és *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*), amelyek ugyancsak Gödel életének bizonyos fejezeteit tárgyalják. Nevezett művek egyike sem tekinthető azonban átfogó biográfiának.

Ezt a hiányt pótolja a tudományos igényű feldolgozott Dawson-féle monográfia [3], amely alapos és átfogó kutatómunka eredménye. A szerző rendkívül sok energiát fektetett a gödeli örökség tanulmányozásába. Gödel aprólékos jegyzeteinek a kibogarászása időnként már sziszifuszi vállalkozásnak minősült. Egészen más hangvétellű a centenáriumra megjelent, *R. Goldstein* által írt életrajz [13]. A nagy osztrák logikai gondolkodó szellemi hagyatékának egyfajta feldolgozására vállalkozik a legjobb szakértők megszólaltatásával 2002-ben kiadott kétkötetes munka [1]. A tudományos feldolgozás szándékával írt tanulmányok hasznos segítséget nyújtanak mindazoknak, akik a Gödel által felvetett témák iránt érdeklődnek. Egy szellemesen megírt kötet hasonlítja össze Gödel és Einstein munkásságát, gondolatvilágát barátságukon keresztül [27]. Ez a remek és könnyen megérthető kötet minden bizonnyal megérdemelné, hogy magyarul is megjelenjen.

A gazdag irodalom alapján mostani szemlénkben arra teszünk kísérletet, hogy bemutassuk Gödel életútját (1), majd foglalkozzunk teljességi és nemteljességi tételeivel (2), Einsteinnel való barátságát megkoronázó kozmológiai meglátásaival (3), platonizmusával (4) és az utóbbi években híressé vált, hagyatékában megtalált istenbizonyításával (5).

1. Életút⁵

Kurt Gödel 1906. április 28-án született az Osztrák-Magyar Monarchiához tartozó morva fővárosban, Brünnben (ma: Brno). Ő a család második és egyben legkisebb gyermeke. Szülei, *Rudolf* és *Marianne Gödel* Németországból származnak. Gödel felmenői között egyetlen tudós sem található. Apja csak kereskedelmi iskolát végzett, de szorgalma egy nagy brünni textilgyár igazgatói posztjára emelte, amelynek egyúttal társtulajdonosa is lett. Rudolf Gödel Brünn előkelő elővárosában vásárol villát, fiait a német nyelvű lutheránus magániskolába járattja. Mindketten nagyon jó tanulók. Bár Kurt csak egyetlen évben, egyetlen tantárgyból (matematikából) nem érte el a legjobb osztályzatot, mégsem tartotta senki csodagyerekek. Kíváncsisága miatt környezete a „Miért úr” (*Herr Warum*) becenevet adta neki. Egyébként befelé forduló, érzékeny, betegségre hajlamos fiúcska. Nyolcéves korában reumatikus láz gyötri, hosszabb ideig iskolába sem tud járni. Semmiféle maradandó testi károsodás nem éri, de az évek során egyre erősödő, egészségére és diétájára vonatkozó aggodalmai itt gyökerezhetnek.

1924 júniusában befejezi tanulmányait a brünni reálgimnáziumban és beiratkozik a bécsi egyetemre. Eredeti szándéka szerint fizikát akar hallgatni, de elsősorban *Philipp Furtwängler* nagyszerű előadásai hatására a matematikát választja. Viszonylag hamar felfedezik kivételes tehetségét, és harmadévesként már abban az előkelő körben találjuk, melyet a matematikus *Hans Hahn* és a filozófus *Moritz Schlick* neve fémjelez. Ez a később „Bécsi Körként” híressé

⁴ In: [1] 1. kötet, 63–83. o.

⁵ Vö. [1], főként 1. kötet 49–208. o.; valamint [3] és [4]; továbbá [9], [13] és [27].

vált csoport a pozitivista *Ernst Mach* írásaira hivatkozott. Alapfelfogásuk szerint minden egyes értelmes kérdés a „pozitív adottságok” empirikus megfigyelése révén eldönthető, minden más pedig a metafizikához sorolandó, s mint ilyen tudományosan értelmetlen. Ebben a körben ismerkedett meg Gödel *Rudolf Carnappal*, a jeles tudományfilozófussal, valamint *Karl Mengerrel*, a kiváló matematikussal. Mindez arra ösztönözte, hogy intenzíven foglalkozzék matematikai logikával, illetve a matematika filozófiájával. A Bécsi Kör tagjait ekkortájt *Ludwig Wittgensteinnek* a formális nyelvek struktúrájával és határaival kapcsolatos tézisei izgatták. A társaság tagjai közül néhányan (pl. maga Carnap, illetve *Hans Thirring* fizikus) parapszichológiai jelenségekkel is foglalkoztak. Ez ismét olyan téma volt, amely Gödel érdeklődését is felkeltette. Évekkel később egyik közeli barátjának, a gazdaságtudományokban jeleskedő *Oskar Morgensternnek* azt a megjegyzést tette, hogy a jövő emberei bizonyára meglehetősen furcsának találják majd, hogy a 20. század tudománya felfedezte ugyan az elemi részecskéket, de az elemi pszichikai tényezők lehetőségére nem figyelt föl.

Gödel korántsem osztotta a Bécsi Kör logikai pozitivista nézeteit. A kör filozófiája *Mach* alapfeltevéseit kiterjesztette azzal, hogy egyfajta formális logikai dimenziót vizsgált. Ugyanakkor a logikai-matematikai fogalmaknak nem tulajdonított létezését, hiszen ez – nézetük szerint – a „metafizikába” való visszaeséssel lett volna egyenértékű. Gödel ezzel szemben platonista volt. Ennek konkrét megnyilvánulásairól, mibenlétéről később még részletesebben szólnunk. Itt csak annyit jegyzünk meg: Gödel alapvetően úgy gondolta, hogy a fizikai objektumokon kívül létezik az absztrakt fogalmak világa is. Ezt a világot az ember intuitív módon közelítheti meg, foghatja föl. Minden egyes kijelentésnek, állításnak kell, hogy legyen meghatározott igazságértéke (igaz vagy hamis), függetlenül attól, hogy ez bizonyítható, empirikusan eldönthető vagy cáfolható. Gödel meggyőződése szerint ez a filozófiai meggyőződés nagyban hozzájárult ahhoz, hogy képes legyen eljutni azokhoz a forradalmi matematikai meglátásokhoz, amelyek őt végül is híressé tették.

Jóllehet az ifjú Gödel figyelmesen hallgatta a Bécsi Kör vitáit, azokban nagyon ritkán vett részt. Visszahúzódó, zárkózott maradt, csak néhány közeli barátja volt. Ugyanakkor rendkívül nagyra becsülte a hölgyek társaságát, akik nyilván vonzónak tartották a fiatal férfit. 1928 után távol maradt a Bécsi Kör összejöveteleitől. A *Karl Menger* által szervezett matematikai kollokviumon azonban részt vett: aktívan hozzájárult az évkönyvek szerkesztéséhez, illetve maga is mintegy tucatnyi tanulmánnyal gazdagította ezeket a kiadványokat.

1929-ben nyújtotta be Gödel a bécsi egyetemen doktori disszertációját, amely egy évvel később nyomtatásban is megjelent. Ez a munka, valamint az 1931-ben publikált és a következő évben habilitációs munkaként elfogadott tanulmány, amely a *Principia Mathematica* és a vele rokon rendszerek formálisan eldönthetetlen tételeiről szól, nemzetközi elismerésre talált. A két munka rendkívüli jelentősége és az ott megfogalmazott matematikai eredmények miatt külön visszatérünk ezekre a dolgozatokra.

A megszerzett nemzetközi tekintély nyomán az 1933/34-es akadémiai évet Gödel a nem sokkal korábban alapított *Institute for Advanced Study (Princeton – New Jersey*, a továbbiakban: IAS) vendégeként tölti, ahol az általa felfedezett nemteljességi tételekről tart előadásokat. A következő évben is ott kellene tanítania, de időközben Bécsben idegösszeroppanást kap. Jóllehet hamarosan jobban lesz, Princetonba csak 1935 őszén tér vissza. Ez az amerikai tartózkodás sem lesz hosszú életű: egy hónap múlva ismét megbetegszik és ezzel együtt munkaképtelenné válik. Csak 1937 tavaszán tart ismét előadásokat, de ez alkalommal Bécsben.

Princetonban Gödel pszichiátriai kezelésre szorult. Hogy mi volt a pontos diagnózis, az akták titkossága miatt nem lehet tudni, csak találgatásokra hagyatkozhatunk. Problémái

valószínűleg hipochondriával kezdődtek: kényszeresen foglalkozott a saját táplálkozásával és emésztésével. Több mint húsz esztendőn keresztül pontos feljegyzéseket készített testhőmérsékletéről, valamint azokról a gyógyszerekről, amelyeket a gyomorsavtúltengés ellen szedett. Először csak attól tartott, hogy véletlenül, későbbi éveiben pedig, hogy szándékosan megmérgezik. Ennek a főbiájának köszönhetően igen keveset evett, és krónikusan alultáplált volt. Ugyanakkor különböző tablettákat szedett, mert azt gondolta, hogy szívgyengeségben szenved.

A súlyosabb krízisszituációk időszakait leszámítva lelki problémái meglepő módon nem igazán befolyásolták munkáját. Védőangyala *Adele Porkert*⁶ lett, akit egy bécsi éjszakai mulatóban ismert meg. A katolikus, elvált, Gödelnél hat évvel idősebb asszony táncosnőként dolgozott. Gödel lutheránus szülei a kapcsolatot több szempontból is botrányosnak tartották. A pár azonban hűségesen kitarított egymás mellett: Adele sokszor mentette meg Gödel életét pl. azzal, hogy rendszeresen előre megkóstolta ételét elosztatva a kételyt, hogy bárki is meg akarná mérgezni a tudóst. Viszonylag hosszabb ideig tartó jegyesség után 1938 szeptemberében megházasodtak. Gödel hamarosan ismét az Egyesült Államokba utazik, hogy Princetonban és az Indiana államban lévő Notre Dame Katolikus Egyetemen előadásokat tartson újabb, jelentős kutatási eredményeiről. A Notre Dame-ra való meghívását az akkor már ott tevékenykedő Karl Menger készíti elő. Visszaemlékezéseiben egy megkérdésre válaszolva Gödel katolicizmus iránti érdeklődésére is kitér:

Megkérdettek, hogy Gödel érdeklődést mutatott-e a katolicizmus iránt. Jelenlétemben pusztán egyszer érintett egy erre vonatkozó témát. Egy nap ugyanis váratlanul feltette a kérdést: „Létezik-e a katolikus egyháznak olyan listája, amely valamennyi szentet felsorolja?” Azt ajánlottam, hogy forduljon valamelyik egyháztörténészhez. Hogy ez a kérdés továbbra is foglalkoztatta-e, nem tudom.⁷

Az újabb eredmények a halmazelmélet területéről származtak. A 19. század végén *Georg Cantor* német matematikus bevezetett egy, a végtelen halmazok „nagyságrendi mérhetőségére” vonatkozó fogalmat. Eszerint valamely A halmaz a B -nél „kisebb”, ha az A és B halmaz elemeinek egymáshoz rendelése után B -nek még marad eleme. Ennek a definíciónak a felhasználásával Cantor megmutatta, hogy a természetes számok halmaza kisebb a valós számokénál. Továbbá azt sejtette, hogy nincs olyan halmaz, amelynek „nagysága” (szaknyelven „számossága”) a kettő között lenne. Ezt az ún. kontinuum-hipotézist a matematikusok nehezen tudták „lenyelni”. 1908-ban egy másik német matematikus, *Ernst Zermelo* megalkotta a halmazelmélet axiómarendszerét. Ebben szerepel az ún. kiválasztási axióma, amely – legalábbis egyik megfogalmazása szerint – így adható meg: az egymást nem metsző és legalább egy elemet tartalmazó halmazok minden egyes végtelen összességéhez létezik egy olyan halmaz, amely ezeknek a halmazoknak mindegyikéből pontosan egy elemet tartalmaz. Ez a megfogalmazás, noha rendkívül könnyen beláthatónak és szemléletesnek tűnik, ellentmondásos következményeket von maga után. Például az következik ebből, hogy ha egy gömbfelületet véges sok darabra osztunk, majd a darabokat deformálásuk nélkül ismét összerakjuk, akkor – kellő ügyességgel – egy kétszer akkora térfogatú gömböt kaphatunk. Mindezek nyomán a kiválasztási axiómát a matematikusok meglehetősen „gyanús” tartották. Sejtésük szerint, amely aztán be is igazolódott, sem a kontinuum-hipotézis, sem pedig a kiválasztási axióma nem vezethető le a halmazelmélet egyéb axiómáiból. Attól lehetett tartani, hogy ennek a két elvnek az alkalmazása bizonyos tételek bizonyításakor ellentmondásokhoz vezet. Gödelnek sikerült bizonyítania, hogy mindkét elv a többi axiómával összeegyeztethető.

⁶ Született 1899. november 4-én, korábban egy fényképész, *Alfred Nimbursky* felesége volt.

⁷ In: [1], 1. kötet, 75. o.

Gödel halmazelméleti eredményei egy nagyon régi, nevezetes, *Hilbert* által az 1900-as párizsi matematikai kongresszuson már felvetett problémát oldott meg. Azt gondolhatnánk, hogy mindez egyenes utat jelentett valamely számára megfelelő egyetemi állás megszerzéséhez. A dolog azonban közel sem volt ennyire egyszerű. Míg ő Princetonban és a Notre Dame egyetemen adott elő, az osztrák egyetemekre vonatkozó tanítási jogosultsága (*venia legendi*) megszűnt. Így aztán, amikor 1939 nyarán visszatért Bécsbe feleségéhez (időközben a hitleri Németország annektálta Ausztriát), sorozási behívót kapott, amelyen fegyveres szolgálatra alkalmasnak minősítették.

Korábban Gödel látszólag nem aggódott az európai fejlemények miatt. Jóllehet bizonyos mértékű érdeklődést mutatott a politika iránt, de nem igazán foglalkozott az események alakulásával. Úgy tűnt, hogy korábbi kollégáinak és tanárainak a sorsáról, akik közül többen zsidó származásuk miatt lettek „kegyvesztettek”, nem is vett tudomást. Miközben a világ körülötte összeomlott, ő maga a munkába temetkezett. Végre saját magának is be kellett látnia, bár nem volt zsidó származású, hogy ezek a „változások” őt is életveszélyesen fenyegethetik.

Ebben a kétségbeejtő helyzetben (munkanélkülivé vált és az azonnali katonai behívó fenyegette) az *IAS* segített abban, hogy Gödel és felesége kiutazhasson a Német Birodalomból. Érdeemes megemlíteni azt a levelet, amelyet Neumann János (akkor már az *IAS* professzoraként) *Flexner*nek, az intézet igazgatójának írt 1939. szeptember 27-én. A levél megírásának egyértelmű célja az, hogy Gödel és felesége a bécsi amerikai követségen keresztül vízumhoz juthasson. Talán nem érdektelen, ha idézünk belőle néhány gondolatot⁸:

...Amennyire Gödel kijelentéseiből, valamint a hozzá hasonló módon kezelt esetekből kivehető, az ő problémája a következő: professzori vízumot csak olyan kérelmezőknek adnak, akik ebben az országban a kutatás vagy oktatás területén állást kapnak és korábban már két éve ilyen állással rendelkeztek abban az országban, ahonnan jönnek. A Gödellel – és más menekültekkel – szemben felhozott indok az, hogy a két éves származási országban eltöltött gyakorlatnak közvetlenül a kérvényt megelőzően kellett fennállnia, míg Gödelt a nácik az 1938-as „Anschluß” után állásából elbocsátották. Ez a követelmény – úgy vélem –, hogy teljesen logikátlan. Gödelnek természetesen már korábban megvolt a kétéves tanári gyakorlata. A többféle alkalmat együttvéve már több, mint két évig az Egyesült Államokban tanított, és minden értelmes politikának ellene mond az, hogy valakit, aki több éve professzor volt, csak azért büntessenek meg, mert a nácik elbocsátották hivatalából.

Lehetségesnek tartaná Ön, hogy ebben az értelemben a *State Department*-nél közbenjárjon?

Íme néhány pont, amelyeket ebben az összefüggésben előnyös lenne megemlíteni:

- 1) Tudom, hogy sok esetben látogatóvízumot adtak tanároknak, docenseknek és tudósoknak, és ezeknek az embereknek megengedték, hogy országunkban tanári állásokat töltsenek be. Majd miután két évig országunkban tanítottak, megkapták a professzori vízumot...
- 2) Teljes joggal állítható, hogy Gödel képzési programunkban nem helyettesíthető. Gödel tényleg abszolút pótolhatatlan. Ő az egyetlen élő matematikus, akiről ezt merem állítani. A matematika egyik nagyon jelentős ágát, a formális logikát képviseli, ahol is mindenki mást sokkal nagyobb mértékben múlt felül, mint az a matematika bármelyik más ágában előfordul. Az „eldönthetetlen kérdésekre”, a híres „kontinuum-hipotézis” megoldására, valamint ennek a területnek a matematika más részeivel való váratlan összekapcsolására vonatkozó formális logika teljes modern fejlődése valóban teljességgel az ő egyéni teljesítménye. Mindettől eltekintve tudományos teljesítményeinek íve még mindig erősen felfelé tart, és a jövőben még többet várhatunk tőle. Meg vagyok győződve arról, hogy kimentése Európa hajóroncsából egyike azoknak a nagy egyedi hozzájárulásoknak, amit valaki pillanatnyilag a tudományért tehet.

⁸ In. [1], 1. kötet, 29–30. o.

A Gödel házaspár 1940 januárjában kel útra. A transzszibériai vasútvonalon mennek Ázsián keresztül, majd Jokohamából San Franciscóba hajóznak. Innen vasúton érik el március közepén célállomásukat, Princetont. Gödel soha többé nem hagyta el az Egyesült Államokat. Éves szerződését többször meghosszabbítják az IAS-ban, majd 1946-ban az intézet végleges alkalmazásába kerül. Két évvel később amerikai állampolgárságot kap. A hivatalos ceremónia két tanúja Einstein és Morgenstern, Gödel akkori legjobb barátja volt. Az állampolgárság hivatalos megadását formálisnak tekinthető, rövid vizsga előzte meg. Persze Gödel erre is alaposan felkészült, s az előző napon elmondta Morgensternnek, hogy az amerikai alkotmányban felfedezett egy logikai hibát, amely alapján lehetséges a diktatúra. A vizsga lefolyására vonatkozóan hadd idézzük fel az ismert történetet:

Szokásosan a vizsga a tanúk jelenléte nélkül zajlik. Nekik azt a néhány percet az előszobában kell megvárniuk. Einstein méltó megjelenése folytán a tisztviselő⁹ ezt lehetetlennek érezte. Mindhárman azonnal bemehettek a hivatali szobába, és megkezdődött a vizsga. „Ön eddig német állampolgár volt” – kezdte a bíró. „Elnézését kérem, osztrák” – szakította félbe Gödel. „Igen persze – mondta a hivatalnok – a gonosz diktatúra! De szerencsére ilyesmi nálunk, Amerikában nem lehetséges” – folytatta öntudatosan. „Dehogynem!” – kiáltott fel Gödel és egész ilyen irányban felhalmozott tudását rázúdította a férjira: „Tudom, hogyan lehetséges!!!” Hármuknak nagy erőfeszítésébe került, hogy lecsitítsák, és sor kerülhessen az állampolgárság átadására.¹⁰

Gödel csak 1953-ban lett professzor, de akkor egyidejűleg a *National Academy of Sciences* tagjává is kinevezték. A késlekedés minden bizonnyal szellemi egészségi állapota rovására is írható. Többek között nyilvánosan panaszkodott amiatt, hogy hűtőszekrénye mérges gázokat bocsát ki. Ebben az időszakban barátja, az 1933-tól Princetonban élő Albert Einstein gondoskodott róla. Naponta vitte sétálni, s ezek a séták gyakran nyugtató hatásúak voltak.

Amerikában Gödel nem foglalkozott már a halmazelmélettel, a filozófia és a relativitáselmélet felé fordult. 1949-ben bebizonyította, hogy az einsteini egyenletek megengedik a forgó univerzum létezését, amelyben pedig lehetséges a múltba történő utazás. Az eredményt 1950-ben mutatta be egy nemzetközi matematika kongresszuson. Egy évvel később pedig az *American Mathematical Society* évi tanácskozásán tartotta a rendkívül tekintélyes Gibbs-előadást. Mindeközben az orvosok iránti bizalmatlansága miatt majdnem meghalt egy gyomorfekély következtében. Utolsó publikációja 1958-ban jelent meg. Utána szinte teljesen visszavonult. Csont és bőr volt, üldözési mániája és hipochondriája egyre inkább eluralkodott rajta. A nyilvánosság elé utoljára 1972-ben lépett, amikor a Rockefeller Egyetem díszdoktorává avatta. Három évvel később megkapta a *National Medal of Science*-t, amelyet egészségügyi okok miatt már nem vehetett át személyesen.

1976. július 1-én Gödelt hivatalosan nyugállományba helyezték. Ezzel egyidejűleg újabb kötelezettségeknek kellett eleget tennie: felesége, aki hosszú éveken keresztül segítség, támasz és védelem volt számára, súlyos agyvérzést kapott. Most ő volt a soron, hogy ápolja. Önfeláldozó módon tette ezt mindaddig, míg az asszony egy operáció után hat hónapig kórházi ápolásra szorult. Nagyjából ugyanekkor rákban meghalt Oskar Morgenstern, aki Einstein 1955-ben bekövetkezett halála után gondját viselte Gödelnek. Most már egyedül kellett egyre jobban elhatalmasodó üldözési mániájával megküzdenie. Állapota gyorsan romlott. A mérgezésről való félelme miatt szó szerint halálra éhezettette magát. 1978. január 14-én halt meg.

Adele Gödel három évvel túlélte férjét. 1981. február 4-én bekövetkezett halála után a Gödel által hátrahagyott munkák az IAS-ra maradtak. Gödel életében feltűnően keveset publikált.

⁹ *Phillip Forman* szövetségi bíró volt, aki nyolc évvel korábban *Einstein* honosítását is végezte és időközben jó barátságba kerültek egymással.

¹⁰ [1], 1. kötet, 170. o.

Ugyanakkor hatása a modern logikára óriási. A múlt század kilencvenes éveiben számtalan, a hagyatékban megtalált tanulmányát adták ki (összegyűjtve megtalálhatók az összegyűjtött munkák harmadik kötetében [8]), amelyeket Gödel a mára szinte már teljesen ismeretlen német gyorsírással jegyzett le. Ez a hagyaték, amelyben többek között az ún. ontológiai istenbizonyítás gödeli formalizmusa is található, ugyancsak jelentős és figyelemreméltó. A következőkben a gödeli életmű néhány jelentős és érdekes eredményét szeretnénk bemutatni.

2. Eldönthetőség és nemteljességi tételek¹¹

Gödel legjelentősebb és legismertebb felfedezését az 1929-ben a bécsi egyetemen benyújtott doktori értekezése, valamint a két évvel később publikált, habilitációra benyújtott dolgozata tartalmazza.

Doktori munkájában¹² sikeresen oldott meg egy *David Hilbert* és *Wilhelm Ackermann* elméleti logika tankönyvében¹³ (megjelenési év: 1928) felvetett problémát. A szóban forgó munka összegzi a logikai kifejezések átalakításának szokásos szabályait. Vagyis olyan logikai kifejezésekről van szó, amelyeket az „és”, „vagy” műveletekkel, a „minden egyes”, „létezik” kvantorok segítségével változókból (mint amilyenek a számok vagy a halmazok) képezhetünk. A tulajdonképpeni kérdés így hangzik: levezethető-e valamely axiómarendszerből a tankönyvben felsorolt szabályok segítségével valamennyi olyan kijelentés, amely minden egyes, az adott axiómáknak eleget tevő matematikai elméletben igaz, és csak ezek vezethetők-e le? Egyszerűbben fogalmazva: bizonyítható-e valamennyi kijelentés, amely a szimbólumok mindenféle értelmezése esetén igaz?

Gödel kimutatta, hogy a kérdésre igenlő válasz adható. Disszertációjában sikerült bizonyítania, hogy a kor logikájának elvei elérték céljukat, a nekik szánt szerepet maradéktalanul betöltötték. Segítségükkel bizonyítható minden olyan kijelentés, amely valamely adott axiómarendszer alapján igaz. Ezzel persze még nem nyert bizonyítást az, hogy a természetes számokra (0; 1; 2; ...)¹⁴ vonatkozó igaz állítások mindegyike igazolható lenne a számelmélet általánosan elfogadott axiómái alapján. Ezek között az eredetileg *Giuseppe Peano* olasz matematikus által 1889-ben megfogalmazott axiómák között ugyanis szerepel a teljes indukció elve. Ezen alapul az ugyancsak a középiskolából ismert teljes indukciós bizonyítás, amely szerint ha valamely tulajdonság a legkisebb természetes számra igaz és valamely természetes szám a rá következőre ezt a tulajdonságot átörökíti, akkor a szóban forgó tulajdonság minden természetes számra igaz kell, hogy legyen. Ezt a nagyon is kézenfekvőnek tűnő axiómát a matematikusok fenntartással kezelték. Okuk is megvolt rá, hiszen nem csak a számokra magukra vonatkozik, hanem a rájuk vonatkozó tulajdonságokra is. Egy ilyen „másodrendű” kijelentés meglehetősen merész és rosszul definiált ahhoz, hogy a természetes számok elméletének alapjául szolgáljon. Ennek megfelelően az indukció elvét idővel egyenrangú axiómák végtelen rendszerével helyettesítették, amelyek nem a számok általános tulajdonságaira, hanem bizonyos formulákra vonatkoznak. Ezt az új axiómarendszert

¹¹ Vö.: SMORYNSKA, CRAIG: *Gödels Unvollständigkeitssätze*, [1], 2. kötet, 147–159; tudománytörténeti megközelítésben [3], 46–69; didaktikailag a legjobb bevezetés [22].

¹² GÖDEL, KURT (1929): *Über die Vollständigkeit des logischen Funktionalkalküls*, Dissertation an der Universität Wien, utánnomás [9], 60–101; valamint UŐ (1930a): „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionalkalküls”, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, 349–360, utánnomva [9], 102–123.

¹³ *Grundzüge der theoretischen Logik*.

¹⁴ A természetes számok halmazát a jelenlegi európai iskolai gyakorlat két különböző felfogás szerint oktatja: az egyik szerint (pl. Magyarországon) a 0 természetes szám, míg a másik szerint (Európa nyugati felének többségében) a természetes számok az 1-gyel kezdődnek, vagyis a 0 nem természetes szám. Az alábbi fejtegetések esetén a dolog lényegtelen. Itt mi a magyar középiskolai gyakorlathoz igazítjuk a gondolatmenetet.

azonban nem csak a természetes számok, hanem más matematikai struktúrák is kielégítették, miként azt *Thoralf Skolem* norvég matematikus néhány évvel Gödel munkája előtt bizonyította.

Ugyan a teljességi tétel kimondja, hogy minden axiómákból következő tétel bizonyítható, de a dolognak van egy bökkenője. Ha ugyanis valamely állítás a természetes számokra vonatkozóan igaz, de nem igaz más dolgokra, amelyek ugyanazt az axiómarendszert teljesítik, akkor a kijelentés nem bizonyítható. Ezt a problémát a legtöbb matematikus nem vette igazán komolyan. Abban reménykedtek, hogy semmi olyasmi sem létezik, ami egyrésztől pontosan úgy viselkedik, mint a természetes számok, másrésztől mégis különbözik azoktól. Éppen ezért Gödel következő – immáron mondható legendás – nemteljességi tétele nagy meglepetést okozott.

Gödel 1931-es munkájában, amelyet habilitációs dolgozatnak¹⁵ is beadott a bécsi egyetemen, megmutatta, hogy léteznek olyan, a természetes számokra vonatkozó igaz állítások, amelyek nem bizonyíthatók. Másként fogalmazva: valóban léteznek olyan objektumok, amelyek eleget tesznek ugyan a Peano-féle axiómáknak, mégsem viselkednek mindig ugyanúgy, mint a természetes számok. Meg lehetne kísérelni ezt a nemteljességi tételt „kiiktatni” úgy, hogy valamennyi igaz kijelentést axiómának tekintünk. Ebben az esetben viszont eleve el kellene dönteni, hogy egy állítás igaz-e vagy nem. Gödel azonban azt is kimutatta, hogy formális elméletek esetén (vagyis olyan rendszereknél, amelyek axiómákból és levezetési szabályokból állnak) nem jelent semmiféle különbséget, hogy mely kijelentéseket tekintünk axiómáknak. Akármennyi természetes számokra vonatkozó igaz kijelentést csatolunk is az axiómarendszerhez, mindig lesz még olyan igaz kijelentés, amely nem bizonyítható. S ez érvényes arra is, hogy valamely axiómarendszer összes levezetési, átalakítási szabályával együtt sem elégséges ahhoz, hogy formálisan saját ellentmondás-mentességét eldöntse. Minden egyes teljességi bizonyításnak szüksége van olyan erősebb eszközre, amelyet a rendszer maga nem képes biztosítani.

Mielőtt a két nemteljességi tétel hatásáról röviden szólnánk, ismételjük meg a fentebb elmondottakat a matematika precizitásához közelítő módon.¹⁶ Ehhez először is definiálnunk kell az ω -konzisztencia fogalmát. Az aritmetika (számelmélet) valamely formális elmélete ω -konzisztens, ha valamely $\varphi(x)$ formális-aritmetikai formulára vonatkozóan

- (i) a $\varphi(n)$ kijelentések minden n számra igazolhatóak, és ezen kívül
- (ii) $\exists x \neg \varphi(x)$ igazolható.

Első nemteljességi tétel: Tetszőleges adott, elegendően erős ω -konzisztens formális elméletben található olyan igaz φ mondatok (kijelentések), amelyek az elméletben eldönthetetlenek, vagyis sem φ , sem pedig $\neg\varphi$ nem vezethető le.

Második nemteljességi tétel: Egyetlen ellentmondásmentes, elegendően erős formális elmélet sem képes saját ellentmondás-mentességének bizonyítására.

A két tétel jelentőségét megerősíti az a két anekdota, amely Neumann Jánossal kapcsolatos.¹⁷ A magyar tudós 1924 óta Hilbert közvetlen munkatársának számított, és mint ilyen Hilbert programjának megvalósításán fáradozott. Ez az 1900-ban, Párizsban meghirdetett program annak a matematikusi képességbe vetett optimista hitnek a megnyilvánulása volt, amely

¹⁵ GÖDEL, KURT (1931a): „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.”, Monatshefte für Mathematik und Physik 38: 173–198, utánnnyomva in: [9], 144–195.

¹⁶ Vö. [1], 2. kötet, 152. A matematikailag teljesen precíz megfogalmazást l. in: [22].

¹⁷ Vö. [1], 1. kötet, 102, valamint u. o. 166–167; ill. [3], 61–62.

szerint bármely felmerülő probléma előbb-utóbb megoldható lesz.¹⁸ Érthető tehát, hogy a gödeli eredmények nagyon is foglalkoztatták Neumannt. Gödel a nemteljességi tételekkel kapcsolatos eredményeit a szakmai nyilvánosság előtt 1930 szeptemberében Königsbergben, Hilbert szülővárosában mutatta be. Még az előadás előtt négy szemközti beszélgetésben tájékoztatta Neumannt eredményéről. Ez a beszélgetés annyira hatással volt Neumannra, hogy – még a munka publikálása előtt – 1930. november 20-án levelet intézett Gödelhez¹⁹, amelyben az addig még hivatalosan nem bizonyított második nemteljességi tételre tett egy bizonyítási javaslatot. Időközben persze Gödel is bizonyította ezt, bár egészen más úton. Neumann lovagias módon saját bizonyítását nem publikálta. Egyszer megkérdezték tőle, hogy miért nem mutatott rá Ramsey munkáira, hiszen azokat nyilvánvalóan ismerte, s aligha akadt bárki, aki ekkoriban nála járatosabb lett volna a logikai szakirodalomban. Azt válaszolta, hogy miután megismerte Gödelnek a logikai eldönthetőségről és nemteljességről szóló értekezéseit, nem olvasott semmilyen más szimbolikus logikával foglalkozó szakirodalmat. Ez a túlzó megjegyzés minden bizonnyal nem igaz a szó szoros értelmében, de mutatja a gödeli felfedezésekhez kapcsolódó neumann-i tiszteletet és nagyrabecsülést. Egy másik anekdota szerint Neumann hat éves munka nyomán közel állt ahhoz, hogy a hilberti programot sikeresen végrehajtsa. Egyik este arról álmodott, hogy az utolsó akadályt is sikerült legyőznie. A következő napon teljes gőzzel dolgozott tovább a bizonyításon, de újabb gondok merültek föl. Éjszaka megint álmodott, és megtalálta azt a kulcsot, amellyel az újabb nehézségen is sikerült keresztüljutnia. Azonnal felkelt, de megint csak talált egy olyan lyukat érvelésében, amit sehogy sem sikerült kiküszöbölnie. Két évtizeddel később Gödel tételeire és bizonyítására utalva egyik kollégájának (*Hermann Goldstine*) tréfásan azt mondta: „Mekkora szerencséje van a matematikának, hogy a harmadik estén semmit sem álmodtam.”

Hilbert maga is ott volt Königsbergben, de nyilvánvaló módon nem vett részt az egzakt ismeretelméleti konferencián, amelyen Gödel bemutatta eredményeit. A sors iróniája, hogy éppen itt, vagyis Hilbert szülővárosában és éppen akkor, amikor a város díszpolgárává avatta szülöttjét, akkor, amikor a rádió többszörösen megismételte a német orvosok és természettudósok konferenciáján tartott nyitóbeszédét, amelyben leszögezte:

A matematikus számára nem létezik semmiféle *ignorabimus*, és véleményem szerint a természettudományban sincs ilyen... Az igazi ok, amiért nem találunk megoldhatatlan problémát, véleményem szerint az, hogy megoldhatatlan problémák egyáltalán nem is léteznek. A balga *ignorabimus* helyett megoldásunk így hangzik: tudnunk kell, tudni fogjuk.²⁰

Ebben a szituációban egy huszonnégy éves fiatal tudós, Kurt Gödel a Hilbert-program végrehajthatatlanságát bizonyítja. Hogy mikor tudatosította Hilbert ezt a „vereséget”, pontosan nehezen állapítható meg. Az eredménynek biztosan nem örült. A matematika alapjainak olyan megalkotásában reménykedett, amely képes lett volna a komplex elméletek teljességét egyszerűbb, jobban átlátható elméletek teljességéből levezetni. Gödel ezzel szemben nemteljességi tételeit nem tekintette az axiomatikus módszer alkalmazhatatlansága bizonyítékának, pusztán úgy vélte, hogy a matematikai tételek levezethetősége nem tehető automatikussá. Nézete szerint eredményei inkább csak azt támasztják alá, mennyire jogosult a matematikai kutatásban az intuíció alkalmazása.²¹

¹⁸ Talán a legszebben a híres párizsi előadásból vett idézettel világítható meg ez az optimizmus: „A minden egyes matematikai probléma megoldhatóságára vonatkozó meggyőződésünk munkánk erős ösztönzője. Állandóan halljuk magunkban a felhívást: *Itt a probléma, keresd a megoldást. Pusztá gondolkodással rátalálsz; a matematikában ugyanis nincs ignorabimus!*” I. [1] 2. kötet, 148.

¹⁹ L. in: [1], 2. kötet, 137–138.

²⁰ Idézte [3], 62. Ez olvasható *Hilbert* sírfeliratán is. („Wir müssen wissen, wir werden wissen.”)

²¹ Vö. még SIMONYI ANDRÁS: *A Hilbert-program és Gödel nem-teljességi tételei*, online: http://epa.oszk.hu/00100/00186/00005/996_simonyi.html.

A Gödel által – a fentebb említett bizonyítások során – kifejlesztett fogalmak és eljárások mára a rekurziós elméletnek nevezett tudományág alapjaihoz tartoznak. Így a modern informatika nélkülük elképzelhetetlen. Szinte hihetetlen, de a példák, gyakorlati alkalmazások hosszú sora igazolja az absztrakt, első pillanatra a valóságtól teljesen elrugaszkodottnak látszó gödeli nemteljességi tételek mindennapos hasznát.

Érdemes röviden utalnunk rá, hogyan tekint a mai matematikusok társadalma általában a Gödel-féle felfedezésre és a vele kapcsolatos problémákra. Hadd idézzünk egy közismert, általánosnak mondható véleményt:

A matematikusok hamar túltették magukat ezen a fejleményen. ... A helyzet az, hogy Gödel tétele egyáltalán nem érinti a matematikai igazságok abszolút voltát. Ha egy matematikai igazság bizonyítást nyer, éppúgy abszolút és örök érvényű marad Gödel tétele után, mint volt Gödel tétele előtt.²²

Tanulságos lenne megvizsgálni, hogy ebben az összefüggésben mit is kellene érteni a „matematikai igazságok abszolút voltán”, de ebbe a problémakörbe itt nem kívánunk elmélyedni. E sorok írója számára kétséges marad, hogy ez a fenti értelmezés Gödelével megegyezik-e. A nemteljességi tételek méltóbb értékelését vélem felfedezni Neumann János 1951. március 15-én a New York Times-ban megjelent írásában:

Gödel előtt magán a matematikán belül soha sem hajtották végre szigorúan a bizonyíthatatlanságot. A logika soha többé nem lesz ugyanaz.²³

3. Kozmológia és idő²⁴

Amerikába való áttelepülése után Gödel nem foglalkozott már igazán sem a logikai alapjainak, sem pedig a halmazelméletnek a kérdéseivel. Érdeklődését egyre inkább filozófiai problémák kötötték le. Miként *Yourgrau* megállapítja,

Gödel nagy filozófus akart lenni Platón, Leibniz és Kant hagyományát követve. Meg kellett azonban állapítania, hogy ezt a célt életében későn tűzte ki, legszebb éveit a logikának, matematikának és fizikának szentelte. Hogy ambíciói mennyire nagyok voltak és hogy mennyire a korszellem áramlatával szemben állt, kiolvasható abból a tizennégy filozófiai tézisből, amelyet a hatvanas években *My philosophical viewpoint* címmel rögzített jegyzetei közölt. Ebben a fogalmaknak kifejezetten objektív létezését tulajdonít, és határozottan elhatárolódik a materializmustól. ... Sőt még tovább megy és kijelenti, hogy a világ racionális. Ez egyfajta filozófiai teizmusra emlékeztet, amely szerint a világ rendje annak a nagy szellemnek a rendjét tükrözi vissza, amely a világot kormányozza. ... Ami a vallásokat illeti, Gödel többé-kevésbé azt az álláspontot képviseli, hogy a vallások többségükben rosszak, de a vallásosság nem az.

Hitt a másik világok és a „más magasabb fajtájú” ésszel rendelkező lények létezésében. Gödel olyan új világnézet megalkotására törekedett, amely a világot az akkoriban meglévő nézeteknél jobb perspektívában mutatná be. A kései éveiben Hao Wanggal folytatott beszélgetésekből kikristályosodik az a hit, hogy egy hiteles filozófiának többé-kevésbé axiomatikus módon ... olyan alapvető fogalmakkal kell szolgálnia, amelyek a valóság alapját képezik. Ide tartoznának véleménye szerint az ész, az ok, a lényeg, a véletlen, a szükségszerűség, az érték, az isten, az ismeret, az idő, a forma, a tartalom, az anyag, az élet, az igazság, az idea, a valóság és a lehetőség. Wang szerint Gödel, a filozófus annak a

²² LACZKOVICH MIKLÓS: *Mi a matematika? – A matematikai igazságról*, <http://www.mindentudas.hu/laczkovichmiklos/20061103laczkovich1.html?pIdx=6>

²³ A cikk teljes szövegét l. [1], 1. kötet, 27–28.

²⁴ Vö.: [1], 2. kötet, 215–304, főként 269–288. (PALLE YOURGRAU: „*Philosophische Betrachtungen zu Gödels Kosmologie*”); l. továbbá [3], 148–165; az itt közölt ábrázolás nagyjából követi [27] 124–164. o.

kívánságának adott hangot, hogy egykor majd „a metafizikában ugyanaz történik meg, mint amit a fizikában Newton megtett.”²⁵

Ehhez a filozófiai érdeklődéshez társult a fizika iránti őszinte vonzalom, amelyet az Einsteinnel kötött barátság és a napi séták csak erősítettek.²⁶ Mindkettőjük számára az ontológiát mellőző filozófia ugyanúgy pusztá illúzióknak számított, mint a filozófiát mellőző, pusztá mérnöktudományokra leszűkített fizika. Gödelnek alkalma is kínálkozott arra, hogy egy írás keretében ilyen irányú elképzeléseit megörökítse. Einstein 70. születésnapjára (1949) P. A. Schilpp emlékkötetet adott ki (a népszerű 20. századi filozófusokat bemutató *Library of Living Philosophers* sorozatban)²⁷. Felkérte Gödel is, hogy írjon egy néhány oldalas írást. Schilpp témát is javasolt: a realista álláspont a fizikában és a matematikában. Gödel ezt elutasította, fejében olyan ontológiai fejtegetés gondolata motoszkált, amelynek témája az idő lényegének filozófiai vizsgálata lett. Évekkel később H. Wangnak azt mondta, hogy az idő Einstein után is megmaradt filozófiai kérdésnek. Heideggeről és más kortárs „időfilozófusoktól” (H. Bergson, J. M. E. McTaggart) eltérően, akik ugyancsak komolyan foglalkoztak az időfogalom ontológiai jelentőségével, Gödel más utat választott. Nem eredményekkel egyáltalán nem kecsegtető metafizikai vitát nyitott, hanem a fizikai kérdést matematikai összefüggéséből kiindulva kívánta tárgyalni. Ehhez kiváló alapnak bizonyult Einstein általános relativitás-elmélete.

Hogy ez a dolgozat mennyire fontos volt Gödel számára, mi sem mutatja jobban, mint hogy egy hónappal a munka elkezdése után azt írja anyjának, hogy míg ezzel a munkával el nem készül, nem lesz ideje levelet írni. Gödel kiindulópontja világos: a relativitás-elmélet megfogalmazásával először adódott olyan lehetőség, hogy az idő realitásának kérdését olyan elméleti keretbe ágyazva vizsgáljuk, amelyben formális matematikai módszerek alkalmazhatóak. A megválaszolandó kérdés pedig így hangzik: elismerhető-e egyszerre, következetes módon az intuitív értelemben vett idő létezése és a relativitás-elmélet igazsága? Gödel voltaképpen Einstein ontológiai érvelését folytatva igyekezett logikai következtetéseket levonni. A probléma Einstein számára is ismert volt. Az említett Schilpp-kötet Gödel cikkéhez írt válaszában olvashatjuk: „Olyan problémáról van szó, amely engem már az általános relativitás-elmélet felállításaakor nyugtalanított”.²⁸

A kérdés felvetésének alapvető feltétele, hogy mindenekelőtt különbséget tegyünk az általunk intuitív módon észlelt, tapasztalt idő, valamint a téridő t -vel jelölt időkomponense között. Einstein számára ez a különbségtétel fontos volt. A relativitás-elmélet követői és alkalmazói a sokféle empirikus siker láttán ezt már elfeledték. Gödelnek az említett tanulmányban sikerül egy olyan, az általános relativitás-elmélet egyenleteinek eleget tevő világmodellt megalkotnia, amelynek olyan rendkívüli geometriája van, hogy téridő-struktúrájának időkomponense nem tekinthető értelmes módon az intuitív idő ábrázolásának. Einstein az általános relativitás-elmélet segítségével a fizikát geometriai formába öntötte, Gödel pedig az idő relativisztikus geometrizálásának határesetét alkotta meg. Ezt úgy sikerült elérnie, hogy először felsorolta mindazokat a tulajdonságokat, amelyek szükségesek ahhoz, hogy egy fogalmat az intuitív idővel azonosíthassunk. Többek között az események egymásutániságának egyfajta aszimmetriát kellene mutatniuk, vagyis ha valamely A esemény B előtt bekövetkezik, nem

²⁵ [27], 124–125.

²⁶ A fizika iránti lankadatlan érdeklődést mutatja, hogy első amerikai látogatásakor Gödel részt vett Neumann János kvantummechanika szemináriumán is. Ugyanakkor az életrajzi adatok nem támasztják alá azt az állítást, hogy Einstein igénybe vette volna Gödelnek mint matematikusnak a szolgálatait, miként azt Jáki Szaniszló állítja. (in: HETESI, ZS. és TERES ÁGOSTON: *Vallás és tudomány*, Budapest, 2005. 90. o.)

²⁷ PAUL ARTHUR SCHILPP: *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher*. (Általunk ismert legutolsó német nyelvű kiadása: 1979, Braunschweig, vö. *Mérleg*, 1979/3. 281–283. o.)

²⁸ Idézve [27], 135.

következhet be B után is. Ezt követően matematikai úton megmutatta, hogy az általa vázolt világmodellben két tetszőleges időszerű világvonallal összekapcsolt esemény esetén ez nem feltétlenül így van, vagyis az A esemény előtt is és után is – gyors rakétával – elérhető lenne, hogy a B eseményt megfigyeljük. Mindebből Gödel arra következtetett, hogy ebben a világban a téridő-struktúra egyértelműen tér és nem idő. Vagyis a t paraméter egy további térdimenziót ad meg, nem pedig azt az időt, amelyet mindennapi tapasztalatunk szolgáltat.

Gödel hatékonyan demonstrálta, hogy az időutazás összeegyeztethető az általános relativitás-elmélettel. Az időutazók lelkes tábora természetesen üdvözölte ezt az eredményt. De hogyan reagált a tudós világ? Hadd idézzük ismét Yourgrau meglátásait:

Einstein szeme előtt metamorfózis zajlott le. Az általa felvázolt elmélet, amely az időt akarta megragadni, matematikailag rögzíteni, és az emberi megértés számára hozzáférhetővé tenni, Gödel kezei között szemfényvesztés áldozatává vált.

... (Einstein) azt írta: „Kurt Gödel érkekezése véleményem szerint fontos adalék az általános relativitás-elmülethez, főként az időfogalom elemzéséhez.”²⁹

... Hogy mennyire nem voltak képesek kortársai és nem vagyunk képesek mi mindazt méltányolni, amit Gödel mindabból megalkotott, amit Einstein ráhagyott, az valóban szomorú történet. Ritkán értettek meg ilyen sokból ennyire sokan ennyire keveset. Gödelnek a relativitás-elmélet felé tett „kirándulását” intellektuális hobbiként leírták... Senki sem tekintette munkáját annak, ami igazából volt: a Gödel-féle program folytonos továbbfejlesztésének, amely arra vállalkozott, hogy a formális módszereknek az intuitív fogalmak felfogásában megmutatózó határait megmutassa.³⁰

A fogadtatásra vonatkozóan Dawson a nemteljességi tételekkel való párhuzamra hívja fel a figyelmet:

Mindkét felfedezés általánosan elfogadott nézeteket rendített meg. Mindkettő váratlan irányból érkezett. Mindkettőt olyan filozófiai kérdések motiválták, amikkel a tudományos társadalomban sokan egyáltalán nem foglalkoznak. Mindkettő paradox vonásokat mutat, ami könnyen kételyt válthatott ki. És mindkettő elméleti különlegességnek tűnt, amelynek a fizikában és a matematikában tevékenykedők mindennapi munkájára vonatkozóan csekély jelentősége van.³¹

4. Platonizmus³²

Nem csak az Einstein 70. születésnapjára kiadott kötet adott alkalmat Gödelnek filozófiai nézetei kifejtésére, hanem néhány évvel korábban már megtaláljuk nevét az ugyanabban a sorozatban megjelenő, *Russell* matematikai munkáját elemző kötet szerzői között is.³³ A Schlipp által közzétett valamennyi kötet sajátossága, hogy az egyes esszékre az érintett, bemutatott filozófusok röviden válaszolnak. Russell – Gödel többszörös kérése ellenére – ezt nem tette meg. Arra hivatkozott, hogy 18 év telt el azóta, hogy a matematikai logika területén dolgozott, és sok időt vett volna igénybe a Gödel kritikai megjegyzéseire vonatkozó álláspont megfogalmazása. A dolog érdekessége, hogy Russell ekkor (1943 tavaszán) Princetonban tartott előadásokat. Mint saját visszaemlékezéseiben megjegyzi, hetente egyszer találkozott Gödellel, Einsteinnel és *Paulival* Einstein lakásán. Egyetlen szóval sem utal azonban arra, hogy Gödel esszéje szóba került volna ezeken az összejöveteleken. Ugyanakkor a beszélgetéseket „kiábrándítóknak” nevezte, mivel

²⁹ [27], 137–138.

³⁰ [27], 163.

³¹ [3], 158.

³² Vö.: [1], 2. kötet, 337–438, főként 341–386; I. továbbá [3], 148–150; valamint 169–173.

³³ K. GÖDEL (1944): *Russell's Mathematical Logic*, in: SCHLIPP, PAUL A. (szerk.): *The Philosophy of Bertrand Russell*, Evanston, IL, Northwestern University Press, 123–153. Utánnymás [7], 119–141.

Jóllehet mindhárman zsidók, menekültek és – legalábbis elvben – kozmopoliták, mégis ... a metafizikához mindnyájan németesen közelítenek... (ezen felül) Gödel a legtisztább platonistának bizonyult.³⁴

Gödel persze nem volt zsidó. De platonista volt, és ebben ugyanazt a kiindulópontot képviseli, mint Russell. Hiszen – miként Gödel esszéjében rámutat – Russell a matematikai filozófiához írt bevezetésében hangsúlyozza, hogy a logika ugyanúgy a való világgal foglalkozik, mint a zoológia, csak eszközei absztraktabbak és általánosabbak. Ugyancsak teljes mértékben osztja Russell nézeteit, és jogosnak véli a logika és a matematika axiómáinak a természettörvényekkel való összevetését, valamint az érzéki észleléseknek a logikai belátásokkal való összehasonlítását. Gödel szerint az osztályok és elképzelések reális objektumokként gondolandók. Ezek létezésének feltételezése ugyanúgy legitim, mint a fizikai testek esetén. Mindkettőre ugyanolyan értelemben van szükség ahhoz, hogy az érzéki észlelés kielégítő elméletét megalkothassuk. Gödel ugyanakkor úgy véli, hogy az axiómák nem szükségképpen evidensek. Jogosultságuk sokkal inkább abban a tényben rejlik, hogy az érzéki észlelés levezethetőségét lehetővé teszik. Három évvel később egy másik tanulmányban Gödel többet is elárul ilyen irányú elképzeléseiből. Mielőtt erre rátérnénk, érdemes még egy kicsit elidőznünk a Russell matematikai filozófiáját értelmező munkánál anélkül, hogy a részletekben elmélyednénk³⁵.

Gödel alapos kritika tárgyává teszi a Russell által alkalmazott „ördögi kör elvét” (*Teufelskreisprinzip*), amely szerint egyetlen sokaság sem tartalmazhat olyan elemeket, amelyek fogalmak révén pusztán magából ebből a sokaságból definiálhatóak lennének. Gödel véleménye szerint a legszorosabb értelmezést figyelembe véve ennek az elvnek az alkalmazása kizárná a nem-predikatív definíciókat, és ezzel a matematika logikából való levezethetőségét tenné lehetetlenné, vagyis a modern matematika java részét megsemmisítené. Évekkel később *Charles Chihara* ismételten kitér erre a problémára, és egész fejezetet szentel könyvében Gödel ontológiai platonizmusának.³⁶ A szerző különbséget tesz az ontológiai platonizmus és a mitológiai platonizmus között. Előbbin azt a hitet, meggyőződést érti, amely szerint az olyan objektumok, mint a halmazok, valóban léteznek. Az utóbbi pedig azt jelentené, hogy úgy kell megalkotni a matematikai modellt, *mintha* ezek (pl. a halmazok) valóban létező objektumok lennének. Gödel platonizmusát az ontológiai kategóriába sorolja. Chihara gondolatmenetét így folytatja:

Gödel megfontolásai ontológiánkban masszív népeségrobbanást idéznének elő: Ha ugyanis matematikai intuíciónkat használunk arra, hogy matematikai objektumokat posztuláljunk, akkor színleg teológiai intuíciónkat is használhatnánk arra, hogy olyan „objektumokat” mint az angyalok posztuláljunk.³⁷

Talán meglepő, de Gödel valóban hitt a szellemek létezésében, és nem valószínű, hogy bármilyen ellenvetése lett volna a teológiai intuíció jogosságát illetően.

Gödel Russell-esszéjének utolsó bekezdése különleges figyelmet érdemel. Gödel szerint az alapok nem teljes megértése tehető felelőssé azért, hogy a matematikai logika messze elmaradt azoktól az elvárásoktól, amelyeket vele szemben Peano és mások támasztottak. Itt főként *Leibniz*re gondol, aki szerint a logika az elméleti matematikát ugyanolyan mértékben megkönnyítené, miként a tízes számrendszer alkalmazása a numerikus számolásokat leegyszerűsítette. A dolog azonban egyáltalán nem reménytelen, hiszen *Leibniz*

³⁴ Idézi [3], 140.

³⁵ A részletes elemzésre vágyó olvasó figyelmébe ajánljuk *C. Parson* bevezető tanulmányát: [2], 102–118, valamint Uő: *Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought*, in: *The Bulletin of Symbolic Logic* 1, 44–74.

³⁶ CHIARA, CHARLES (1973): *Ontology and the Vicious-circle Principle*, Ithaca, N. Y., Cornell University Press.

³⁷ Idézi [3], 141–142. o.

characteristica universalis Gödel szerint nem utópisztikus elgondolás, hanem olyan kalkulus, amelyet jórészt már maga Leibniz kifejlesztett. Itt még Gödel azt az álláspontot képviseli, hogy Leibniz nem látta érettnak az időt arra, hogy elgondolásai termékeny talajra hulljanak, ezért azokat visszatartotta. Később gyakran beszélt ismerőseinek arról, hogy a kiadók Leibnizet egyszerűen szabotálták. Bizonyos, hogy az 1944–45-ös esztendőben Gödel nagyon sokat foglalkozott a leibnizi életművel. Morgenstern beszámolt Mengernek egy érdekes esetről:

Gödel egyszer elvitt a princetoni egyetemi könyvtárba, és két halomban összegyűjtött anyagokat rakott elém. Az egyikben olyan könyvek és cikkek voltak, amelyek Leibniz életében vagy közvetlenül halála után jelentek meg, és pontos utalásokat tartalmaztak a filozófus írásaira vonatkozóan... A másikban pedig az ezeket idéző gyűjteményes könyvek, sorozatok voltak. Bizonyos esetekben sem az idézett oldalon, sem pedig másutt nem volt található Leibniztől semmiféle írás. Más esetekben pedig éppen az idézett kötet előtt vagy közvetlenül az idézett oldal előtt szakadt meg a sorozat, illetve az idézett írásokat tartalmazó kötet állítólag meg sem jelent.³⁸

A háború után Morgenstern és Gödel igyekezett megszerezni a Leibniz-írások másolatait. Különböző nehézségekbe ütköztek, végül tervüket feladták.

Gödel matematikára támaszkodó filozófiai nézeteinek kifejtésére ismételt lehetőséget nyújtott Lester, R. Fordnak, az *American Mathematical Monthly* (AMM) kiadójának felkérése. Az esszé témája a kontinuum-hipotézis volt, és elemi, népszerűsítő formában a *What Is...?* sorozatnak megfelelően kellett volna erről a szakterületről röviden írni. Gödel természetesen a megbízást – mint mindig – nagyon komolyan vette. Ford abban reménykedett, hogy 1946 júliusában megkapja a kéziratot. 1946 decemberében úgy fejezte be kiadói tevékenységét, hogy a kézirat még mindig nem volt kész. A következő év augusztusában készült el a gépírásos változat a sorozatba illeszkedő címmel: *What Is Cantor's Continuum Problem?*³⁹ Az esszé kiindulásul megismétli a kontinuum-hipotézist történelmileg ismert formájában („A kontinuum minden egyes végtelen halmaza vagy a természetes számok halmazának vagy az egész kontinuumnak a számosságával rendelkezik.”). Ezt követi a kisszámú eredmény pontos ismertetése. Felmerül a kérdés, hogy miért ennyire kevés eredménnyel rendelkezünk ezen a területen. Gödel véleménye szerint nem pusztán matematikai nehézségekről van szó, hanem az olyan fogalmaknak, mint a „halmaznak” és „injektív leképezésnek” az alaposabb elemzéséről. Ismerteti a Brouwer, Weyl és Poincaré által megfogalmazott „negatív beállítódás” szempontjait, majd rátér a kontinuum-hipotézisnek a filozófiai állásponttól független pontos jelentésére és jelentőségére, vagyis arra, hogy a kontinuum számossága axiómák adott halmazából formálisan levezethető-e. Ha sikerül is igazolni, hogy nem levezethető (ez később Cohennek sikerült), a kérdés akkor sem tekinthető megválaszoltnak, ugyanis Gödel úgy véli, hogy a klasszikus halmazelmélet elképzelései és axiómái jól meghatározott realitással rendelkeznek. Ennélfogva a bizonyítás csak annyit jelentene, hogy a jelenleg elfogadott axiómák nem képesek ennek a realitásnak a teljes leírására. Új axiómák felvételével esetleg célt lehetne érni. Még ha ezek közül az új axiómák közül egyik-másik nem is belső szükségszerűségből fakad, igazságuk induktív módon elfogadható, hiszen következményeik felülvizsgálhatóak. Gödel saját megfogalmazásával:

Létezhetnek olyan ... felülvizsgálható következményekkel rendelkező axiómák, amelyek egy egész ágazatot világítanak meg, és jelentős eszközöket nyújtanak a fennálló problémák megoldásához, ... hogy azokat ugyanolyan értelemben igaznak kellene tekintenünk, mint valamely jól bevált fizikai elmélet esetén.

³⁸ Idézi [3], 143. o.

³⁹ Eredetileg megjelent: *American Mathematical Monthly* 54: 515–525; Errata 55, 151; utányomás: [7], 176–187. o.

Jóllehet Gödel anyjához intézett egyik levelében a tanulmányt nem tekinti nagy jelentőségűnek, a befektetett munka nem erről árulkodik. Az esszé a „matematikai platonizmus kiáltványa”-ként valóban sokakra nagy befolyással volt.

Gödel életében megjelent munkái között nem találunk további filozófiai fejtegetést. Platonizmusát leginkább három forrásból szokás rekonstruálni⁴⁰: az *American Mathematical Society* előtt 1951-ben megtartott Gibbs-előadásból, amelynek szövegét többször átdolgozta, de soha sem jelentette meg⁴¹; a hat változatban megírt, de végül is be nem küldött, Carnap munkásságát taglaló írásból⁴²; valamint a már említett, Hao Wanggal 1971 és 1977 között folytatott beszélgetések szövegéből.

A gödéli platonizmusról szóló fejtegetéseink lezárásaként idézzük fel a Gibbs-előadás néhány gondolatát. Saját nemteljességi tételeinek következményeként úgy véli, hogy az alábbi filozófiai alternatíva bontakozik ki előttünk: vagy nem redukálható az emberi szellem működése pusztá agytevékenységre, vagy pedig a szellemi folyamatoktól és döntésektől függetlenül léteznek a matematikai objektumok és tények. A kettő persze nem zárja ki egymást, sőt Gödel meg volt győződve arról, hogy mindkettő egyszerre igaz. Az elsővel nem foglalkozik különösebben, annál inkább a másodikkal. Erőteljesen fellép azzal a nézettel szemben, amely szerint a matematika pusztán a mi szüleményünk, s főként azt a felfogást támadja, amely a matematikai tételeket a szintaktikai (vagy nyelvi) konvenciók, megszokások pusztá aspektusának tekinti, és ezzel tartalom nélkülinek véli. Az előadásban egyfajta platonizmus definícióra is sor kerül. Kommentár nélkül idézzük fel ezt, amely Gödelt magát is jellemzi:

[A platonizmus] az a nézet, hogy a matematika nem-érzékelhető valóságot ír le, amely az emberi szellemnek mind a cselekvésétől mind pedig az állapotától függetlenül létezik, és amelyet csak az emberi szellem képes észlelni, mégpedig valószínűleg nem teljesen. Ez a nézet a matematikusok körében igencsak nem kedvelt. Mégis létezik néhány nagy matematikus, aki ehhez tartja magát. Pl. *Hermite* ...⁴³

5. Vallás és ontológiai istenbizonyítás⁴⁴

A Gödel életére vonatkozó források között fontos szerep jut – mint már említettük – annak a levelezésnek, amelyet anyjával folytatott. Ezekben részletesen szó kerül a vallásról is. Jóllehet mindketten (legalábbis formálisan) katolikus házastársat választottak, mégis rendkívüli fenntartással éltek a katolicizmus ama gyakorlatával szemben, amelyet az akkori osztrák államvallásban megtapasztaltak. Egyik levelében Gödel kinyilvánítja, hogy Európában a vallás nem meggyőződés, hanem a katolikus politikai pártok formájában jelenik meg, amely „nyilvánvalóan káros.”⁴⁵

Gödel saját hitéről a legrészletesebben abban a négy levélben vall, amelyek 1961 nyarán és őszén íródtak anyjához.⁴⁶ Ezekben ismételten hitet tesz a racionális gondolkodás mellett, hisz

⁴⁰ Vö. KÖHLER, ECKEHART: *Gödels Platonismus*, [1], 2. kötet, 341–386. o.

⁴¹ Fellelhető a *Gödel*-hagyatékban, sok idézet található: [1], 2. kötet, 341–386. o., valamint egy összefoglaló elemzés: [3], 169–172. o.

⁴² A hat változatból kettő megjelent in: [8] *Is Mathematics Syntax of Language?* címmel.

⁴³ Idézve in: [1], 2. kötet, 341–342. o.

⁴⁴ Vö. [1], 2. kötet, 215–304, főként 269–288. o.; 307–336.o.; 1. továbbá [3], 118–183. o. és 206. o.; valamint [27] 21–22. o.

⁴⁵ L. [3], 181, 13. láb.

⁴⁶ A levelek megtalálhatók in: [1], 1. kötet, 187–189. o. (Nr. 174, 175, 176, 177); tartalmuk ismertetésére vonatkozóan l. [3], 181–183. o.

annak erejében, valamint elutasítja a vallással szembeni szokásos kortárs filozófiai megnyilvánulásokat. Tekintsük át röviden a levelek gondolatmenetét.

Első levelében (1961. augusztus 1.) Gödel anyja kérdésére válaszolva a halál utáni életről elmélkedik:

Utolsó leveledben felveted azt a súlyos kérdést, hogy hiszek-e a viszontlátásban. Erről csak a következőt mondhatom:

Ha a világ ésszerűen van berendezve, és van értelme, akkor kell léteznie. Mert hát mi értelme lenne egy lény (az ember) létrehozásának, amely a saját fejlődése, valamint a másokkal való lehetséges kapcsolatainak oly széles mezejével rendelkezik, és ennek még csak 1/1000-ét sem képes elérni.

Van-e okunk azt gondolni, hogy a világ ésszerűen van berendezve? Azt hiszem igen. Mert egyáltalán nem kaotikus és önkényes, hanem – miként a tudomány mutatja – mindenben a legnagyobb szabályszerűség és rend uralkodik. A rend pedig az ésszerűség egyik formája.

Hogyan gondolandó el egy másik élet?

Erről természetesen csak sejtéseink vannak. De érdekes, hogy éppen a modern tudomány nyújt ehhez támpontokat. Rámutat ugyanis arra, hogy ennek a mi világunknak a benne lévő összes csillaggal és bolygóval együtt volt kezdete, és minden valószínűség szerint lesz vége is (azaz szó szerint „semmivé” válik).

Akkor miért nem csak ez az egy világ létezik? És minthogy egyszer mi egy napon ebben a világban találtunk magunkra anélkül, hogy tudnánk hogyan és honnan, ezért ugyanez ugyanilyen módon egy másik világban is megismétlődhet.

A tudomány minden esetre megerősíti a Biblia utolsó könyvében előre megjövendölt világvégét, és teret hagy annak, hogy mi következik ez után: „És Isten új eget és új földet teremtett.” Persze megkérdendő: Mire való ez a megkettőzés, ha a világ ésszerűen van berendezve?

Erre a kérdésre Gödel ebben a levélben nem válaszol, pusztán arra utal, hogy nagyon jó válaszok léteznek. Ez irányú megfontolásai már a következő, augusztus 14-én keltezett levélben, ismét csak anyja levelére adott válaszában fogalmazódnak meg:

Amikor azt írod, hogy imárod a teremtést, valószínűleg úgy véled, hogy a világ mindenütt szép, ahová az ember még nem jutott el stb. Éppen ez tartalmazhatja a rejtély megoldását, hogy miért létezik két világ. Az emberrel ellentétben az állatok és növények kisebb mértékben rendelkeznek a tanulás képességével, az élettelen dolgok pedig egyáltalán nem képesek erre. Csak az ember juthat tanulás révén jobb egzisztenciához, vagyis ahhoz, hogy életének több értelmet adjon. És ez valóban kielégítő mértékben megtörténik ebben a világban. Most természetesen kérdezhető:

Miért nem úgy teremtette meg az Isten az embert, hogy mindent rögtön kezdettől fogva helyesen végezzen? Hogy ez a kérdés egyáltalán jogosnak tűnik számunkra, annak egyetlen oka nagyon könnyen lehet, hogy abban a hihetetlen tudatlanságban rejlik, amelyben mi a magunkra vonatkozó tudást illetően ma még mindig vagyunk. Hiszen nem csak azt nem tudjuk, honnan és miért vagyunk itt, hanem azt sem, hogy mik vagyunk (nevezetesen lényegileg és belülről nézve). Ha az ember egyszer az önszemlélődés tudományos módszereivel elég mélyen magába tekinthetne, hogy ezt a kérdést megválaszolhassa, akkor valószínűleg kiderülne, hogy közülünk mindenki egészen jól meghatározott tulajdonságokkal rendelkező valami. Azaz mindenki elmondhatná magáról: valamennyi létező lény közül „Én” éppen a tulajdonságoknak ez az így és így megalkotott kapcsolódása vagyok. Ha pedig ezekhez a tulajdonságokhoz tartozik, hogy nem mindent rögtön helyesen teszünk, hanem sok mindent csak megfelelő tapasztalat megszerzése után, úgy akkor ebből a következők, hogy Isten helyettünk olyan lényeket is teremthetett volna, amelyeknek semmit sem kellene tanulniuk⁴⁷, de ezek a lények nem „Mi” lennének. Vagyis akkor mi egyáltalán nem léteznénk. A szokásos felfogás szerint a „Mi vagyok?” kérdés úgy válaszolandó meg, hogy olyan valami

⁴⁷ Gödel eredeti levelében a következő lábjegyzet áll: „természetesen felteendő, hogy ilyen – vagy közel ilyen – lények egyáltalán valahol léteznek vagy létezni fognak”.

vagyok, ami önmagától egyáltalán semmiféle tulajdonsággal sem rendelkezik, ahhoz hasonlóan, mint a ruhafogas, amelyre bármely ruha ráakasztható. Persze mindezekről a dolgokról még nagyon sokat lehetne mondani.

Azt hiszem, hogy a vallásban – ha nem is éppen az egyházakban – sokkal több ésszerűség rejlik, mint azt szokásosan hiszik. Persze bennünket (azaz az emberiség középrétegét, ...) nagyon kora ifjúságunktól fogva az iskola, a rossz vallásoktatás, a könyvek és élmények révén előítéletesen ez ellen neveltek.

Hogy a megfogalmazott érvelés kívánnivalót hagy maga után, a dolog természetéből következik. Ugyanakkor Gödel nem lenne Gödel, ha ennyiben hagyná. Ezért aztán a gondolatsor folytatását felleljük a szeptember 19-i levélben:

Első pillantásra ez az egész szemlélet, amelyet Neked taglalok, meglehetősen valószínűtlennek látszik. Azt hiszem azonban, ha pontosabban utánagondolunk, akkor ez igenis lehetséges és ésszerű lesz.

Főként azt kell elképzelnünk, hogy a tanulás nagyobb részben csak az eljövendő világban történik meg, mégpedig azzal, hogy visszaemlékszünk élményeinkre, és ezeket csak akkor értjük meg igazán, úgy, hogy itteni élményeink úgyszólván csak tanulásunk nyersanyagául szolgálnak.

Mert hát mit tanulhatna pl. egy rákbeteg szenvedéseiből? Mindenképpen elgondolható, hogy a második világban világossá válik számára, milyen (nem csak higiéniai, hanem talán egészen más szempontból elkövetett) hibái okozták ezt a betegséget. Ez által persze nem csak a betegségével kapcsolatos összefüggést, hanem egyúttal más hasonló összefüggést is megtanul megérteni. Természetesen ez föltételezi, hogy sok összefüggés létezik. Ezekről a mai tudomány és iskolai bölcsesség még csak nem is álmodik. Erről mindenféle teológiától függetlenül meg vagyok győződve. Hiszen már az ateista *Schopenhauer* is cikket írt az „egyén sorsában látszó szándékosságról”. Ha valaki azzal az ellenvetéssel él, hogy lehetetlen dolog, hogy a másvilágon e világi élményeinkre emlékezzünk, akkor ez teljesen jogtalan, mert hiszen a másik világban már ezekkel a látens emlékekkel születhetünk. Ezen kívül természetesen fel kell tételeznünk, hogy értelmünk ott lényegesen jobb lesz, mint itt, úgy, hogy minden fontosat ugyanazzal a csalhatatlan biztonsággal ismerünk meg, mint a $2 \times 2 = 4$ -et (egyébként ugyanis pl. egyáltalán nem tudnánk, hogy a másik világban nem halunk-e meg), ahol a csalódás objektíve kizárt lesz. Így aztán abban is abszolút biztosak lehetünk, hogy mindazt valóban megéltük, amire emlékezzünk.

A témakörhöz tartozó utolsó, 1961. október 10-én keltezett levél az értelem, a racionalitás felől közelít:

Nem hiszem, hogy az értelemnek bármely területen való alkalmazása valamiféle egészségtelen dolog lenne (miként utalsz rá). Teljesen jogtalan lenne azt állítani, hogy éppen ezen a területen az értelemmel nem lehet semmit sem elérni. Mert hát 3000 évvel ezelőtt ki hitte volna, hogy a legtávolabbi csillagokról meghatározható lesz, milyen nagyok, milyen nehezek, milyen forrók és milyen távolságra vannak és azt, hogy közülük sok százszor nagyobb a Napnál. Vagy ki hitte volna, hogy az ember televíziókészüléket készít? Amikor 2500 évvel ezelőtt először megfogalmazták azt a tant, amely szerint a testek atomokból állnak, akkor ezt annyira fantasztikusnak és megalapozatlannak kellett tekinteni, mint ahogyan sokak számára ma a vallásos tanok tűnnek. Mert akkoriban szó szerint egyetlen egy olyan megfigyelt tény sem volt ismert, amely az atomelmélet felállítására vezethetett volna, hanem ez pusztán filozófiai okokból történt. Mindazonáltal ez az elmélet mára ragyogó megerősítést nyert, és a modern tudományok jelentős részének alapjává vált. Természetesen ma még nagyon messze vagyunk attól, hogy a teológiai világképet tudományosan megalapozhassuk, de azt hiszem, hogy már ma lehetséges lehet, hogy tisztán, pusztán az értelem alapján (anélkül, hogy bármelyik vallás hitére támaszkodnánk) belássuk, hogy a teológiai világszemlélet az összes ismert ténnyel (beleértve a földünkön uralkodó állapotokat) messzemenően összeegyeztethető.

Ezt már 250 évvel ezelőtt a híres filozófus és matematikus Leibniz megkísérelte megtenni...

Teológiai világszemléletnek nevezem azt az elképzelést, hogy a világ és benne minden értelemmel és ésszel bír, méghozzá jó és kétségtelen értelemmel. Ebből közvetlenül következik, hogy földi itt-létünk, minthogy önmagában legfeljebb egy nagyon is kétséges

értelemmel rendelkezik, csak valamely másik egzisztencia céljául szolgáló eszköz lehet. Az az elképzelés, hogy a világban mindennek értelme van, egyébként pontosan analóg azzal az elvvel, amely szerint mindennek oka van, s amelyen az egész tudomány alapul.

A fenti megfontolások részletes elemzése érdekes tanulságokkal járna, de itt terjedelmi okokból ettől eltekintünk. A fentebbi levelek nem tudományos értekezés igényével íródtak, de betekintést engednek Gödel ilyen irányú gondolatvilágába. Miközben

a mai filozófusok 90 százaléka abban látja fő feladatát, hogy ... a vallást kiverje az emberek fejéből,⁴⁸

addig ő egy Leibniz igényeinek is eleget tevő ontológiai istenbizonyítás megalkotásán fáradozik. Érdekes tény, hogy az anyjával folytatott levelezésben általában tudományos kérdések nem kerülnek elő. Ez alól mindössze két kivétel van: az Einstein születésnapjára készített, fentebb már elemzett kozmológiai tárgyú munka, valamint az ontológiai istenbizonyítás, bár ennek ma ismert változata csak anyja halála után készült el.

1970 késő nyarán, őszén Morgenstern többször látogatást tett Gödelnél az intézetben. Naplójában beszámol arról, hogy Gödel nagyon elégedett ontológiai istenbizonyításával. Hogy milyen bizonyításról volt pontosan szó, nem lehet tudni, hiszen Gödel semmi ilyen irányú dolgot nem publikált. Morgenstern magyarázata szerint, nem akarta, hogy

azt gondolják róla, hogy valóban hisz Istenben, pedig ő csak egy logikai vizsgálódást szeretett volna elvégezni.⁴⁹

Ugyanakkor bizonyosnak látszik, hogy bizonyítását valamilyen módon (legalább halála után) közölni akarta a világgal. 1970 februárjában *Dana Scott*nak megmutatott, és átbeszélte vele egy változatot, amelyet aztán Scott 1971 őszén Princetonban szeminárium keretében az érdeklődők számára közzétett. Ez a változat volt ismert a filozófusok, matematikusok, logikusok körében. Gödel hagyatékából aztán előkerült az a két kézzel írott oldal, amely az eredeti bizonyítást tartalmazza. Íme⁵⁰:

⁴⁸ Gödel októberi, fentebb már idézett levelének megfogalmazása.

⁴⁹ Idézi [3], 206.

⁵⁰ A hagyatékából származó faksimile megtalálható in: [1], 2. kötet, 307–308. o.

$\mathcal{P}(\varphi)$ φ is positive ($\varphi \in \mathcal{P}$)

Ax 1 $\mathcal{P}(\varphi) \cdot \mathcal{P}(\psi) \supset \mathcal{P}(\varphi \wedge \psi)$ Ax 2 $\mathcal{P}(\varphi) \vee \mathcal{P}(\sim \varphi)$

P1 $G(x) \equiv (\varphi) [\mathcal{P}(\varphi) \supset \varphi(x)]$ (God)

P2 $\varphi \text{ Ess } x \equiv (\psi) [\psi(x) \supset N(y) [\varphi(y) \supset \psi(y)]]$ (Essence of x)

$p \supset_N q = N(p \supset q)$ Necessity

Ax 2 $\mathcal{P}(\varphi) \supset N\mathcal{P}(\varphi)$
 $\sim \mathcal{P}(\varphi) \supset N \sim \mathcal{P}(\varphi)$ } because it follows from the nature of the property

Th. $G(x) \supset G \text{ Ess } x$

Df. $E(x) \equiv (\varphi) [\varphi \text{ Ess } x \supset N \exists x \varphi(x)]$ necessary Existence

Ax 3 $\mathcal{P}(E)$

Th. $G(x) \supset N(\exists y) G(y)$

hence $(\exists x) G(x) \supset N(\exists y) G(y)$

" $M(\exists x) G(x) \supset M N(\exists y) G(y)$

" $\supset N(\exists y) G(y)$

M = possibility

any two instances of x are nec. equivalent,
 exclusive or * and for any number of summands

$M(x) \supset G(x)$ means ^{the system H} all pos. prop. is com-
 patible. This is true because of:
 $A4: P(\varphi) \cdot \varphi \supset_N \psi \supset P(\psi)$ which impl
~~is~~ $\begin{cases} x=x & \text{is positive} \\ x \neq x & \text{is negative} \end{cases}$
 But if a system S of pos. prop. were incomp.
 It would mean that the sum prop. S (which
 is positive) would be $x \neq x$.
 Positive means positive in the moral acrob.
 sense (independently of the accidental structure of
 the world). Only when the ax. true. It m.
 also means "attribution" as opposed to "privation"
 (or containing privation). This is the proper
~~of~~ φ privation: $(x) N \neg \varphi(x)$ - otherwise $\varphi(x) \supset x \neq x$
 hence $x \neq x$ positive ~~is~~ $x=x$ is contradictory. At
 or the explicit ~~is~~ ~~is~~
~~is~~ x i.e. the normal form in terms of elem. prop. contains a
 member without negation.

Ennek a két oldalnak mára könyvtárnyi szakirodalma keletkezett. Hogy egy istenbizonyításnak még ma is ilyen „konjunkciója” van, azt kissé megvilágítják Hans Küng megfontolásai:

Az istenbizonyítások mára sokat veszítettek meggyőző erejükből, de bűvöletükből annál kevesebbet. Még mindig csendes, titkos vonzóerőt gyakorolnak a gondolkodó emberre. Létezik Isten? Ez bizonyítható kell, hogy legyen! Cáfolhatatlanul, racionálisan, mindenki számára belátható módon. Lehetséges, hogy az istenbizonyítások mára bizonyításként meghíúsultak, halottak. De még halottként, meghíúsultként is az utókortól tiszteletet követelnek. És mindemellett nem is kevesen az istenbizonyítások ravatalánál egy szomorú csakazértis-sel mondják: mégiscsak lehetségesnek kell lennie!⁵¹

Talán ez munkálkodott Gödelben is. Anélkül, hogy a szóbeli kifejtést és a bizonyításokat közölnék, álljon itt – a logikában jártas olvasó kedvéért – egy mai formában megadható változat, amely a szokásos logikai jelöléseken („és” - \wedge , „vagy” - \vee , „nem” - \neg , „létezik” - \exists , „minden” - \forall , „következik” - \rightarrow , „identitás” - \equiv) túl felhasználja a modális logika

⁵¹ KÜNG, HANS (1978): *Existiert Gott?*, Stuttgart, 583. o.

„szükségszerű” (\Box) és „lehetséges” (\Diamond) jelöléseit, a $P(X)$ pedig egy pozitív tulajdonságot jelöl.⁵²

A1 axióma: $P(X) \equiv \neg P(\neg X)$

A2 axióma: $P(X) \wedge \Box(\forall x)(X(x) \rightarrow Y(x)) \rightarrow P(Y)$

1. tétel: $P(X) \rightarrow \Diamond(\exists x)X(x)$

1. definíció: $G(X) \equiv (\forall X)(P(X) \rightarrow X(x))$ (egy Istenhez hasonló lény)

A3 axióma: $P(G)$ (korollárium: $\Diamond(\exists x)G(x)$)

A4 axióma: $P(X) \rightarrow \Box P(X)$

2. definíció: $XEss.a \equiv X(a) \wedge (\forall Y)(Y(a) \rightarrow \Box(\forall b)(X(b) \rightarrow Y(b)))$

(X az a esszenciája)

3. definíció: $NE(a) \equiv (\forall X)(XEss.a \rightarrow \Box(\exists x)(X(x)))$

(szükségszerű létezés)

2. tétel: $G(x) \rightarrow GEss.x$

(korollárium: $G(x) \rightarrow \Box(\forall y)(G(y) \rightarrow y = x)$)

5. axióma: $P(NE)$

3. tétel: $\Box(\exists x)G(x)$

Részletesen megmutatható, hogy a fenti bizonyítás voltaképpen Gödel kedvenc filozófusának, Leibniznek a gondolatmenetére utal. Leibniz két helyen foglalkozik ezzel a témával, mindkettőben a tökéletes létező fogalma fontos szerepet játszik: a monaszokról szóló művének 41., 44. és 45. pontjában, valamint a *Spinozával* 1676-ban Hágában folytatott egyik beszélgetésben, amelyben bizonyítja, hogy a legtökéletesebb lény létezik⁵³.

Isten létének néhány egyszerű és evidens feltételből való bizonyíthatósága azon múlik, hogy mennyire tudjuk ezeket a feltételeket elfogadni. Ugyanakkor a fentihez hasonló logikai „levezetések” segítséget nyújthatnak abban, hogy értelmes, racionális fogalmi keretet hozzunk létre, amelynek segítségével értelmes kijelentéseket tehetünk. Talán érdemes felidézni H. Küng végkövetkeztetéseit⁵⁴:

- Az elméleti ész segítségével lehetetlennek tűnik a világ és az ember általunk tapasztalt valóságából az Isten deduktív levezetése úgy, hogy valóságát logikai végkövetkeztetésekben demonstráljuk.
- Ezzel szemben nem tűnik lehetetlennek egy olyan induktív rávezetés, amely minden egyes ember számára a kérdéses valóság elérhető megtapasztalását kívánja megvilágítani, hogy így ... a gondolkodó és cselekvő embert racionális, felelős döntés elé állítsa, amely a tiszta észen túlmenően a teljes embert igényli.

Dawson szerint Gödel életét és munkásságát négy mély meggyőződés irányította. Először is, hogy az univerzum ésszerűen szervezett, és az emberi szellem által felfogható. Másodsor,

⁵² L. in: [1], 2. kötet, 326. o.

⁵³ „*Quod Ens Perfectissimum existit*”; a szóbanforgó leibnizi szövegeket l. in: [1], 2. kötet 311–312. o.

⁵⁴ KÜNG: i. m., 603. o.

hogy az univerzum okság szempontjából determinisztikus. Továbbá, hogy a fizikai világ mellett létezik az elképzeléseknek a világa is. Valamint meg kell kísérelni, hogy az elképzelések megértését introspekció révén elérjük⁵⁵.

Gödel munkásságát sem szűkebb szakterületén, sem filozófiai, teológiai szempontból nem dolgozta még fel igazán az arra illetékes tudós társadalom. Meglátásai olyan ösztönzéseket adhatnak, amelyeket mindegyik területnek alaposabban szemügyre kellene venni. Jelenleg úgy tűnik, hogy jól látta saját magát és korát, amikor azt mondta:

Nem illek bele ebbe a századba.⁵⁶

Irodalom

- [1] BULDT, BERND – KÖHLER, ECKEHART – WEIBEL, PETER – KLEIN, CARSTEN – DEPAULI-SCHIMANOVICH-GÖTTIG, WERNER (2002): *Kurt Gödel, Wahrheit und Beweisbarkeit*; Band 1: Dokumente und historische Analysen, Ár: 41,40 €; Band 2: Kompendium zum Werk, Ár: 41,40 €; Wien, öbv hpt VerlagsgmbH and Co. KG.
- [2] CSABA FERENC (1998): *Az ontológiai bizonyítás és Kurt Gödel*. In: *Magyar Filozófiai Szemle* 42, 57–69.
- [3] DAWSON, JOHN W. JR. (1999): *Kurt Gödel: Leben und Werk* (Computerkultur XI. kötet), Springer, Berlin etc, Ár: 55,00 €. Eredeti angol kiadás címe és megjelenési éve: *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, 1997.
- [4] DAWSON, JOHN W. JR. (1999): *Kurt Gödel und die Grenzen der Logik*, In: *Spektrum der Wissenschaft*, 1999. szeptember, 74–79.o.
- [5] DEPAULI-SCHIMANOVICH, WERNER (2005): *Kurt Gödel und die Mathematische Logik*, Linz, Trauner, Ár: 27,00 €.
- [6] ESSLER, WILHELM K. (1991): *Gödels Beweis*. In: Friedo Ricken (Hg.): *Klassische Gottesbeweise in der Sicht der gegenwärtigen Logik und Wissenschaftstheorie*. Stuttgart, Kohlhammer, (1991), 140–152.
- [7] GÖDEL, KURT (2001): *Collected Works, Volume 2, Publications 1938–1974*, Oxford etc., Oxford University Press, Ár: 37,47 €.
- [8] GÖDEL, KURT (2001): *Collected Works, Volume 3, Unpublished Essays and Lectures*, Oxford etc., Oxford University Press, Ár: 42, 16 €.
- [9] GÖDEL, KURT (2001): *Collected Works, Volume I, Publications 1929–1936*, Oxford etc., Oxford University Press, Ár: 42, 16 €.
- [10] GÖDEL, KURT (2003): *Collected Works, Volume IV., Selected Correspondence, A–G*, Oxford etc., Oxford University Press, Ár: 138,84 €.
- [11] GÖDEL, KURT ÉS RODRIGUEZ-CONSUEGRA, FRANCISCO A. (1998): *Unpublished Philosophical Essays*, Basel etc., Birkhäuser Verlag, Ár: 72,76 €.
- [12] GÖDEL, KURT; FEFERMAN, SOLOMON ÉS GOLDFARB, WARREN (2003): *Collected Works, Volume 5., Selected Correspondence, H–Z*, Oxford etc., Oxford University Press, Ár: 129, 65 €.

⁵⁵ [3], 226. o.

⁵⁶ „Ich passe nicht in dieses Jahrhundert.” – idézi [20].

- [13] GOLDSTEIN, REBECCA (2006): *Kurt Gödel, Jahrhundertmathematiker und großer Entdecker*, München, Piper, 312 o. Ár: 19,90 €. Eredeti angol kiadás címe és megjelenési éve: *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel (Great Discoveries)*, 2006.
- [14] GUERRERIO, GIANBRUNO (2002): *Kurt Gödel. Logische Paradoxien und mathematische Wahrheit*, Spektrum der Wissenschaft.
- [15] HANKOVSKY, TAMÁS (2006): *A tulajdonság fogalma Kurt Gödel ontológiai istenérvében*. In: Mezei Balázs (szerk.): *Az értelemig és tovább... Vallásfilozófiai tanulmányok*. Budapest, Szent István Társulat, 2006. vö.: <http://startadsl.hu/hankovszky/pb/godel>.
- [16] HOFSTADTER, DOUGLAS (1999): *Kurt Gödel*, in: Time, 1999. március 29, elektronikus változata megtalálható: <http://www.time.com/time/time100/scientist/profile/godel.html>.
- [17] HOFSTADTER, DOUGLAS R. (2006): *Gödel, Escher, Bach. Ein Endloses Geflochtenes Band*, Klett-Cotta, Ár: 35,00 €. Ez a legutolsó, általunk ismert kiadás. A könyv eredeti angol címe és megjelenési éve: *Gödel, Escher, Bach, an Eternal Golden Braid*, 1979. Az első német kiadás 1985-ben jelent meg. A könyv hosszú időn keresztül vezette a besztzseller listákat. 1980-ban Pulitzer-díjjal, majd az American Book Award díjával tüntették ki. A magyar fordítás 3. utánnomása 2005-ben jelent meg: *Gödel, Escher, Bach. Egybefont gondolatok birodalma*, Typotext Kft, 777 o.
- [18] NAGEL, ERNST ÉS NEWMAN, JAMES R. (2005): *Gödel's Proof*, Routledge, 15,6 €. (Németül: *Der Gödelsche Beweis*, új kiadás 2006 decemberében.)
- [19] REGIS, ED (1989): *Einstein, Gödel & Co. Genialität und Exzentrik – Die Princeton-Geschichte*, Ár: 12,90 €.
- [20] SIGMUND, KARL; DAWSON, JOHN ÉS MÜHLBERGER, KURT (2006): *Kurt Gödel. Das Album – The Album*, Vieweg, Ár: 29,90 €. Vö.: Gödel kiállítás internetes oldala: <http://www.goedelexhibition.at/start/>.
- [21] SMULLYAN, RAYMOND (1989): *Spottdrosseln und Metavögel*, Fischer-TB.-Vlg., Ár: 9,70 €.
- [22] SMULLYAN, RAYMOND M. (1999): *Gödel nemteljességi tételei*, Budapest, Typotex.
- [23] SPEKTRUM BIOGRAFIE (2004): *Descartes, Gödel, Newton. Paket Biografien berühmter Wissenschaftler*, Spektrum der Wissenschaft (2004. október), Ár: 9,80 €.
- [24] TASCHNER, RUDOLF (2002): *Musil, Gödel, Wittgenstein und das Unendliche*, Picus Verlag GmbH. Ár: 7,90 €.
- [25] WEIBEL, PETER ÉS SCHIMANOVICH, WERNER (1997): *Kurt Gödel. Ein mathematischer Mythos*, A. Wuth Vlg.
- [26] WOITSCHACH, MAX (1986): *Gödel, Götzen und Computer. Eine Kritik der unreinen Vernunft*, Vlg. Bonn aktuell, Ár: 4,00 €.
- [27] YOURGRAU, PALLE (2005): *Gödel, Einstein und die Folgen, Vermächtnis einer ungewöhnlichen Freundschaft*, Beck, Ár: 19,90 €. Eredeti angol kiadás címe és megjelenési éve: *A World without Time: The Forgotten Legacy of Gödel and Einstein*, 2005.